*О.В.Лобанова*

# ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ DERIVE

Алгебра. Математический анализ. Геометрия. Математическая статистика. Теория вероятностей

Содержание

# ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

**Система *Derive***, полное название которой *Derive a Mathematical Assistant* (математический помощник *Derive*), фирмы Soft Warehouse (Гонолулу, Гавайи, США) принадлежит к классу компьютерных систем для автоматизации математических вычислений и прежде всего — символьных (аналитических) преобразований. По образному выражению, эта система является для алгебры, уравнений, систем уравнений, тригонометрии, векторов, матриц и математического анализа примерно тем же, чем научный калькулятор для чисел. Вместе с тем система *Derive* прекрасно справляется и с численными расчетами, сочетая их с использованием вполне современной графики, как двумерной, так и трехмерной.

**Немного истории**. Появление такого рода компьютеризованных систем обусловлено всей логикой развития вычислительных методов в науке и практике, общим для которых (с момента появления компьютеров) является незыблемость сложившихся этапов решения любой прикладной задачи: постановка, выбор алгоритма решения, составление программы, тестирование (как правило, весьма трудоемкое) и , наконец, собственно расчеты. По существу, перед нами готовый перечень дисциплин, которыми должен владеть инженер-исследователь для того, чтобы добраться до итога — численного результата и оценки влияния различных параметров. Получалось, что использование компьютеров не упрощало, а усложняло решение практических проблем. Разделение труда (кто-то ставит задачу и выбирает алгоритм решения, а кто-то программирует, тестирует и вычисляет) немного ускоряло процесс решения и уж совершенно точно усложняло его, мало увеличивая его надежность и эффективность: «жрецы» — программисты диктовали свои условия, вторгаясь со своими техническими требованиями в этот процесс, который для больших задач сразу же терял свою «прозрачность». (О какой тут надежности и эффективности расчетов можно было говорить!)

Большие затраты времени на освоение возможностей компьютеров и программирования долгое время создавали своеобразное «узкое горло» в обозначенной выше цепочке решения практических задач. Появление научных калькуляторов приблизило вычислительные средства к пользователю (разработчику, инженеру, студенту), но не ликвидировало главное — необходимость программировать и отлаживать задачу, что приводило к потерям времени и ослаблению внимания к существу дела — проблеме.

Настоящим ответом на этот вызов следует считать создание компьютеризованных математических систем типа Eureka фирмы Borland, MathCAD фирмы MathSoft, MatLAB фирмы MathWork (первые публикации на русском языке относятся к началу 90-х годов). Такие системы позволяли использовать возможности развитых численных методов без классической процедуры программирования и в тоже время предоставляли инженеру-исследователю удобную для его работы среду.

Если первое поколение этих и аналогичных, гораздо более мощных систем (Maple V, Mathematica 2, MathCAD 3.0) проявляло часто «детскую беспомощность» при решении задач в формульном виде, то последующие, а тем более нынешнее, поколения работали с символьной математикой и с числами уже с той эффективностью и в таком темпе, что пользователю не было необходимости тратить на организацию процессов преобразований и вычислений все свои интеллектуальные и временные ресурсы, и оказалось возможным реально сосредоточить внимание на самой задаче.

В настоящее время используется довольно много систем компьютерной алгебры, систем автоматизации математических вычислений, рассчитанных на массового пользователя: muMath, Reduce, MathCAD 3.0 — 7.0, *Derive*, Maple V, Mathematica 2/3 др. Информация и интерес к ним пришли, к сожалению, в Россию довольно поздно, что связано с отсутствием литературы о таких конкретных системах у нас вообще вплоть до самого последнего времени. Действительно, если первые публикации для массового пользователя за рубежом по системе *Derive* относятся к 1991 г. (см. например, David C. Arney «*Derive* Laboratory Manual for Differential Equations» Addison-Wesley, 1991, ISBN 0-201-5726), то в России — спустя пять лет — В. П. Дьяконов «Справочник по применению системы *Derive*». — М.: Наука, Физматлит. 1996. Пробел, конечно, постепенно ликвидируется, в том числе и по отношению к системе *Derive*, но до насыщения рынка еще далеко. Данная книга вносит свой вклад в этот процесс.

**Возможности системы *Derive*.** Система разрабатывалась более 10 лет, и процесс этот продолжается. В данном случае речь идет о возможностях, заложенных , главным образом, в версиях *Derive 3.11* под MS-DOS и 4.02 под Windows, вполне доступных в настоящее время и в России.

*Derive a Mathematical Assistant* относится к классу малых компьютерных математических систем и в этом своем качестве во многих отношениях является по-своему уникальным программным продуктом. Корни этого обстоятельства связаны с базовым языком программирования этого продукта — создатели выбрали язык MuLISP, одну из версий языка высокого уровня LISP, использование которого обычно связывается с решением проблем из области искусственного интеллекта.

Как подчеркивается в Справочнике В.П. Дьяконова (с. 16), «... ядро *Derive* содержит около 1000 функций, написанных на языке MuLISP, и 23 тысячи программных строк. Для сравнения, громадная система Mathematica 2.2.2 содержит в ядре, написанном на языке C++, столько же функций. Удивительная компактность ядра *Derive* связана именно с языком MuLISP, прекрасно подходящим для реализации сложных рекурсивных функций, взаимодействующих друг с другом в ходе осуществления символьных преобразований». И далее (с. 18), что «... именно использование языка MuLISP придает системе *Derive* интеллектуальность, которой так не хватает малым математическим системам, как Eureka, MathCAD (до версии 3.0) или MatLAB.»

Система *Derive* предстает перед нами как многофункциональная система, способная без внешних расширений эффективно решать самые разнообразные прикладные задачи, прежде всего, задачи математического моделирования в науке, технике и экономике, имея в своем инструментарии удивительно широкий спектр самых разнообразных методов. Справочник В. П. Дьяконова, наиболее полный в настоящее время из русскоязычных изданий, выделяет следующие основные возможности этой системы:

- вычисление алгебраических, тригонометрических, гиперболических, статистических и финансово-экономических функций, а также и специальных математических функций;
- действия над числами, операции с действительными и комплексными числами, представление их в дробно-рациональной форме;
- символьные операции с многочленами, включая разложение их на простые множители и вычисление действительных и комплексных корней, дробно-рациональными функциями, функциями многих переменных;
- символьное и численное интегрирование и дифференцирование, вычисление пределов и сумм, нахождение разложений в ряды, включая экзотические разложения в виде «компота» многочленов, тригонометрических и других функций, к необходимости которых часто приводит решение технических и физических задач;
- операции с векторами и матрицами, элементы которых могут быть числами или арифметическими выражениями;
- преобразования формул с использованием подстановок, разложение на множители и пр.;
- построение двумерных и трехмерных графиков в параметрической форме, в полярной и декартовой системах координат и т.д.

Познакомившись с системой Derive, каждый может продолжить свой список, и он объективно может быть различным для каждого активного пользователя соответственно различным областям его использования, а эти области, как уже подчеркивалось, — весьма широки.

Система *Derive* позволяет строить двумерные и трехмерные графики в полярной и декартовой системах координат с возможностью их масштабирования с целью получения максимальных размеров и выразительности для заданных размеров экрана.

Таким образом, универсальность и интегрированность системы *Derive* позволяет использовать её для решения широкого круга задач, как математических, так и научно-технических. Современные версии *Derive* к тому же еще и «открытые» системы, допускающие настройку на решение специальных задач пользователя и использование поставляемой развитой библиотекой функций, расширяющих их системы, и без того немалые.

Система *Derive* (версия 3.11) может быть установлена и прекрасно работать на всех современных типах персональных компьютеров, при этом претендуя на весьма скромные требуемые ресурсы: 1,2 Мбайта на жестком диске и минимальная оперативная память. Система поддерживает все виды видеоадаптеров, при установке драйверов кириллицы возможно создание и использование текстовых комментариев на русском языке, также как и русскоязычных идентификаторов.

Версия 4.02 системы для Windows формально требует тоже не очень больших по современным масштабам ресурсов: PC-совместимый компьютер с 8 мегабайтами оперативной памяти при использовании всех версий операционных систем (Win 3.1x, 95/98, NT).

Эта версия может работать с MS Office, что важно прежде всего для подготовки итоговых отчетов с русскоязычными текстами и при использовании вставок из промежуточных результатов работы *Derive*. Как видно, система *Derive* не выпадает из общего процесса интеграции создаваемых прикладных программ с современными текстовыми, табличными и графическими процессорами.

Нельзя не упомянуть и о том, что существуют и калькуляторы (например, фирмы Hewlett Packard) со встроенной системой *Derive*, выпущенные относительно давно, но популярные еще и сегодня, хотя процесс миниатюризации ПК, казалось бы, должен вытеснить эти устаревшие устройства. Причина, видимо, в том, что многие из архисовременных систем автоматизации вычислений (последние версии Maple V, R3/R4, Mathematica 2/3, MathCAD 6.0 PLUS, например) весьма требовательны к ресурсам ПК и не демонстрируют при этом никаких преимуществ перед HP-92 с системой *Derive* в отношении скорости выполнения символьных операций.

Конечно, прогресс есть прогресс — компьютерные системы совершенствуются. И все же в настоящее время «малышка» *Derive* по-прежнему на высоте. Как отмечается в цитируемом Справочнике В. П. Дьяконова (с. 16), «среди математических систем по-своему уникальна система MathCAD. Ее документы (т.е. программы, комментарии, результаты вычислений и графики) имеют естественный для математической литературы вид. Однако при вводе математических выражений в этой системе пользователь должен постоянно помнить о правилах ввода специальных математических символов, которых нет на клавиатуре ПК класса IBM PC. Далеко не сразу запоминаются правила редактирования формул». И далее: «*Derive* и здесь имеет достоинство: ввод математических символов с клавиатуры выполняется как набором специальных математических символов на панели, так и вводом (в версии под Windows) соответствующих слов... Эти слова на экране дисплея порождают изображение соответствующих математических символов. Таким образом, *Derive* объединяет достоинства привычной символики математических выражений с правилами их ввода, характерными для разных систем и языков программирования (например, Basic и Pascal). Особенно удачно и, главное, очень просто то, что пользовательский интерфейс реализован в версии 4.02 под Windows».

**Система *Derive* в науке и образовании**. Система *Derive* очень эффективно может быть использована в образовательных учреждениях в очень широких возрастных диапазонах (начиная примерно с 5—6 класса общеобразовательной школы) и в наших российских условиях. Она полезна многим — учителям и учащимся всех специальностей, там, где возникает нужда в вычислениях и анализе.

Большое число школьных задач, требующих обширных и утомительных вычислений, могут быть решены в *Derive* одним нажатием на клавишу. За счет появляющегося дополнительного резерва времени открывается возможность использовать новые методы обучения и изучения математики. Многие темы могли бы быть изучены лучше и быстрее, чем при использовании традиционных методов. Эта возможность широко используется за рубежом.

У нас в России исторически сложились свои взгляды на соотношение использования классических и новейших (компьютеризованных) методов преподавания учебных дисциплин, что нельзя не учитывать при внедрении новых технологий.

Все понимают, что научить нажимать на кнопку — еще не значит обучить. Обучение технологиям далеко не всегда тождественно развитию мировоззрения обучающегося. Отсюда и вопрос — когда и где в процессе обучения разумно использовать технологии типа *Derive?*

В отношении системы *Derive* ситуация близка к той, которая привела в свое время к жарким дискуссиям (и не только у нас в стране!) о месте и роли калькулятора в процессе обучения математическим дисциплинам. Что важнее — приобретение навыков устного счета на основе понимания логики и методов вычислений или навыков получения результата путем нажатия в конкретной ситуации соответствующих клавиш?

Здравый смысл, не противоречащий в данном случае результатам исследований педагогов и ученых большой педагогической науки, говорит о том, что нужно и то, и другое. Необходимо обучение этим разным по своей природе навыкам разнести во времени, рекомендовав использование калькуляторов после того, как закрепились навыки классических методов вычислений (прежде всего, навыки устного счета) и когда уже скорость и точность выполнения громоздких вычислений начинают серьезно влиять на понимание процессов решения задач более высокого уровня сложности.

Таким образом, ситуация с проблемой выбора «времени и места» использования системы *Derive* в школьных и иных условиях весьма похожа. Соответственно, близкими должны быть и рекомендации.

Мы придерживаемся той точки зрения, что вся мощь системы *Derive*, проиллюстрированная на высоком уровне в этой книге в отношении как численного, так и символьного анализа, может быть эффективно использована только тогда, когда обучающемуся привиты навыки «ручных» символьных преобразований: алгебраических, тригонометрических, векторных и других. Прежде всего, это касается таких традиционно важных тем, как разложение на множители, операции с дробями, математический анализ, теория дифференциальных уравнений, линейная алгебра и векторный анализ.

Во многих образовательных учреждениях совершенно справедливо не разрешается использовать научные калькуляторы, вооруженные системой *Derive*, на экзаменах и зачетах, прежде чем не будут привиты (и закреплены!) навыки использования классических методов анализа и выкладок в соответствующих областях.

По достижении достаточного уровня освоения классики полезно вспомнить о потенциальном резерве времени, который объективно появляется при использовании систем автоматизации математических расчетов, и использовать этот резерв для резкого расширения круга изучаемых задач и методов вычислений.

Незаменима роль системы *Derive* для интенсификации обучения при подготовке к вступительным экзаменам по математике. Ситуация известна: школьный курс пройден, а вот программы вступительных экзаменов еще не освоены. Времени мало, «набить руку» необходимо — права на ошибку у абитуриента на экзамене нет. Как тут быть? Система *Derive* в этой ситуации может взять на себя значительную часть функций репетитора (хотя и не все, конечно). Берите задачник, включайте компьютер — и за работу. Масса вчерашних школьников-абитуриентов эту сторону системы *Derive* оценила уже давно.

Итак, при правильном подходе система *Derive* может быть эффективно использована в условиях общеобразовательной школы. Можно ли указать какие-либо четкие теперь уже верхние границы эффективного использования системы *Derive* в вертикали «школа — высшая школа — системы повышения квалификации»? Нам кажется, нельзя. Когда обучающийся, разобравшись с системой *Derive*, осознал в деталях ее пользу для своих собственных нужд в той же степени, в какой и ее слабости, он может при изменении круга решаемых задач принять любое решение соответственно особенностям своего характера.

Один, склонный к новшествам и подгоняемый спецификой и возросшей сложностью решаемых задач, обратится скорее всего к другим математическим системам, перечисленным выше (очень часто смена инструментария привязана к курсовым и дипломным работам). Другой, более консервативно настроенный пользователь, подумает о возможностях новых версий системы *Derive* или о более углубленном изучении возможностей его рабочей версии, обратившись, в том числе, за советом к коллегам через Internet. Все зависит от ситуации.

Представляется важным, особенно с методологической точки зрения, использование возможностей системы *Derive* для того, чтобы привить вкус обучающимся к исследованию влияния различных параметров на результаты расчетов в различных областях, и не только традиционных, таких как физика, химия и др. Умение проводить такого рода анализ, причем в графической и аналитической формах, на самой ранней стадии обучения — это уже путь в науку, и вообще в современную жизнь, независимо от того, где собирается приложить свои усилия слушатель: в науке, технике, образовании или в бизнесе.

Напомним о важности широко обсуждаемой в настоящее время проблемы визуализации вычислений как для научных исследований, так и для обучения.

Система *Derive* при всей примитивности графики, если сравнивать ее, конечно, с графическими возможностями больших математических систем, таких как Mathematica 2/3, MathCAD, MatLAB, Maple V тем не менее может внести свой вклад в решение такого рода задач и в различных областях.

Впечатляющими примерами эффективности такой визуализации могут служить так называемые опорные образы, изготовленные средствами *Derive*. В физике — это совмещение на одном поле экрана компьютера (калькулятора) какой-либо формулы, например, известной формулы Френеля и её нескольких различных графических интерпретаций. В данном случае — это кривая дифракции для физиков-оптиков и диаграмма направленности для радиотехников.

Потребность такой графической интеграции в процессе образования трудно переоценить, и она легко удовлетворяется средствами системы *Derive*, в том числе и в калькуляторном исполнении. Цена таких снаряженных системой *Derive* калькуляторов не превышает в настоящее время двухсот долларов, что делает доступным использование системы и в «глубинке» школами, и бизнесменами всех уровней, нуждающимися в мобильных вычислительных средствах.

Правда, довооружение калькулятора принтером, системами для демонстрации расчетов на экране и пр. существенно повышает ценовый барьер — вплоть до стоимости ПК, но тут уже надо смотреть по обстоятельствам, что более приемлемо — покупка персонального компьютера или калькулятора TI-92.

Что же все-таки можно сказать о «востребованности» системы *Derive* с точки зрения мирового опыта? Все говорит за то, что система *Derive* уже завоевала достойное место среди аналогичных ей продуктов — больших и малых.

**Система *Derive* в мире: взгляд из Internet.** В настоящее время стало хорошим тоном ссылаться на информационные ресурсы Internet для подтверждения и(или) иллюстрации своей точки зрения. Давайте и мы посмотрим на систему *Derive* «свысока» с позиции Internet, с места «прописки» этой системы в упомянутой глобальной сети (www.*Derive*.com).

Попытаемся представить себе, насколько это возможно, современное Status quo системы *Derive* для реальных пользователей, давно уже объединенных специализированными журналами и разного рода конференциями. Это тем более полезно для тех, кто еще размышляет о пользе этого продукта для своих нужд, но также и тех, кто уже работает с ним и заинтересован в активном использовании опыта своих коллег, причем в международном масштабе. Зафиксированная в Internet история возникновения и развития групп пользователей системы общения *Derive* начинается с 1991г., а именно:

- Ассоциация пользователей системы *Derive* — *Derive* User Group (DUG) — 1991 г.

Она включает в данный момент (начало 1998 г.) более 500 членов со всех концов света. При этом каждый может стать ее членом. Для этого достаточно заполнить соответствующую форму. *Derive User Group* издает бюллетень *Derive Newsletter* с периодичностью 4 раза в год и организует соответствующие семинары (Local User Group meeting). Все выпуски каждый может при желании получить. Каждый выпуск *Derive Newsletter* состоит примерно из 50 страниц (в 1991 г. 40 страниц) и содержит информацию относительно сфер применения и навыков ее использования. Целью информационного бюллетеня является обмен опытом и пропаганда новых *Derive*-технологий в обучении математике и другим наукам.

• Конференции и совещания пользователей и разработчиков системы *Derive* (1992—1997 гг.)

| Название конференции | Город, страна |
|---|---|
| DUG Meeting | Великобритания |
| DUG Meeting | Германия |
| DUG Meeting | Великобритания |
| *Derive* Conference | Швеция |
| International *Derive* Conference | США (Плимут) |
| DUG Meeting Orlando | США |
| DUG Meeting | ФРГ |
| *Derive* Days | ФРГ (Дюссельдорф) |
| International *Derive* Symposium | США (Гонолулу) |
| US DUG Meeting | США (Хьюстон) |
| International *Derive* Conference | ФРГ (Бонн) |

• Информационные бюллетени (*Derive* Newsletter) — 1991—1997 гг.

| Тематика | Выпуски | Год |
|---|---|---|
| Таблицы в *Derive*<br>Финансовая математика<br>Обработка текстов и *Derive*<br>Обратное преобразование Лапласа | 1—4 | 1991 |
| *Derive* и обучение математике<br>Вычисление градиента<br>Нестандартные вычисления<br>*Derive* в механике<br>*Derive* и химические реакции<br>Логика в *Derive*<br>*Derive* и проблема Гольдбаха<br>Дидактика и *Derive*<br>*Derive* и нормальное распределение | 5—8 | 1992 |
| Физика, механика, тригонометрия в классе и *Derive*<br>Математическая статистика и *Derive*<br>Метод Ньютона-Рафсона в *Derive*<br>Вычисление экстремумов в *Derive*<br>Метод математической индукции в *Derive* | 9—12 | 1993 |

| Тематика | Выпуски | Год |
|---|---|---|
| Электронные таблицы и *Derive*<br>Построение кривых в *Derive*<br>Изучение течения жидкости в *Derive*<br>Тонкости в *Derive*<br>Алгебраические операции с многочленами<br>Плоские кривые и периодические функции в *Derive* | 13—16 | 1994 |
| Справочник кривых в *Derive*<br>*Derive* в Испании и Австрии<br>Функции Бесселя *Derive*<br>Нахождение асимптотических решений в *Derive* | 17—20 | 1995 |
| *Derive* — автоматика или полуавтоматика<br>Искусство программирования в *Derive* | 21—24 | 1996 |
| Трехмерная графика в *Derive*<br>Динамические системы и *Derive*<br>Теория вероятностей в *Derive*<br>*Derive* и линейное программирование | 25—27 | 1997 |

Бюллетени продолжают выходить с той же регулярностью.

- Журнал по системе *Derive* (International *Derive* Journal) — вышло уже два тома.

Ниже приведен выборочный список журнальных тем из тома 1 с краткими аннотациями.

| Темы | Аннотации |
|---|---|
| Компьютерная алгебра в системе *Derive* | Отмечается, что использование системы *Derive* помогает возбудить интерес к изучению этого предмета – компьютерная алгебра представляется почти волшебной, и многие из этих волшебств демонстрируются с использованием технологий системы *Derive* |
| Использование системы *Derive* в обучении | Отмечается, что использование системы:<br>• генерирует энтузиазм, который разделяется и студентами |

| Темы | Аннотации |
|---|---|
| | • освобождает много классного времени, которое можно потратить на решение собственно инженерных проблем;<br>• помогает студентам развивать геометрическое воображение в отношении использования графики в алгебре вычислений |
| Системы компьютерной алгебры типа *Derive* | Открывают новые пути изучения математики,<br>позволяют сделать процесс обучения более эффективным и сместить акценты в обучении с проблем владения инструментарием на проблематику собственно задачи |
| Некоторые методические и технические проблемы использования *Derive* | Система *Derive* для школьников 14–15 лет: решение квадратных уравнений – эффективность дополнения математических идей и возможностей системы |
| Пути внедрения системы *Derive* в математическое образование | Концепции использования системы в образовании |
| Изучение неопределенных интегралов | Методика использования |
| *Derive* как инструмент анализа в новой концепции математического образования в высшей школе | Использование системы в типичных ситуациях:<br>• решении математических задач;<br>• в анализе базовых концепций математики;<br>• в развитии математического мышления |
| Исследование традиционных и новейших методов образования с использованием системы *Derive* | Проводится сравнение классических методов обучения, основанных на чтении лекций, и экспериментальных методов при использовании студентами компьютера как средства для изучения математики |

Итак, анализ мирового опыта, в значительной степени отраженного в информации, размещенной на серверах сети Internet, приводит к следующим достаточно очевидным выводам:

1. Система *Derive* широко распространена в мире от США до Новой Зеландии (около 120 стран), хотя и неравномерно в рамках самих стран. Как оценивается степень распространенности этого продукта?

Для Запада хорошим показателем служит число проданных лицензий, например: *США — около 75000 лицензий (на 150 млн человек населения), Австрия — около 150 000 лицензий (на 8 млн человек населения).*

В России этот показатель не работает. Систему *Derive* используют многие, если судить по внутренним публикациям, но лицензии покупаются мало; это, в основном, те отдельные лица и организации, которые участвуют в работе международных групп, симпозиумов и конференций — неудобно все-таки ссылаться на «пиратские копии». Эта одна из причин отсутствия статистики реального использования системы *Derive* у нас в стране.

2. Дальнейшее развитие системы *Derive* представляется вполне радужным и может быть объяснено, в частности, следующими причинами:

- активной деятельностью всякого рода организаций и групп, служащей прекрасной рекламой этой системы;
- развитием самой системы и появлением Windows *Derive* (версия 4.02), доступной в настоящее время и в России;
- ориентацией на образовательные нужды, в отличие от многих аналогичных продуктов, являющихся профессиональными пакетами;
- заинтересованностью крупных производителей интеллектуальных калькуляторов (например, Texas Instrument), для которых система *Derive* по своим более чем скромным требованиям к ресурсам является прекрасным программным продуктом;
- наличием мощной методической поддержки (книги, учебные пособия, материалы многочисленных рабочих встреч и конференций).

3. В России есть своя ниша для системы *Derive* в образовательной вертикали — от 5—8 класса общеобразовательной школы до институтской скамьи и выше, размер которой зависит от конкретной необходимости для обучающихся ис-

пользовать профессиональные математические пакеты той или иной мощности.

Необходимо иметь в виду, что часто переход к новым пакетам определяется не ограниченностью *Derive*-ресурсов (мощностью численного и аналитического ядра), а наличием в конкурирующем пакете близкого сердцу пользователя текстового редактора или, как упоминалось выше, более удобного с точки зрения пользователя интерфейса, а еще чаще — индивидуальностью пользователя.

**Об этой книге.** Книга, которая перед вами, представляет собой наиболее полное из учебных пособий по системе *Derive* и состоит из трех основных частей:

Часть 1. Основные сведения о системе *Derive.*

В соответствии с названием первая часть содержит информацию об основных деталях технологии загрузки и использования системы *Derive.* Эта важная часть книги содержит массу полезных сведений, и не только для тех, кто впервые знакомится с этой системой.

Следует иметь в виду, что не все вопросы, нужные даже для первоначальной работы, изложены с достаточной глубиной. Это в значительной степени объясняется ограниченностью объема этой части (всего около 1/10 общего объема) и, конечно, вкусами автора. Поэтому и при изучении самой системы *Derive,* и в дальнейшем — при решении классических задач — полезно параллельно использовать и другие доступные справочные пособия.

Часть 2. Решение задач в системе *Derive.*

Это основная часть книги. Здесь размещены задачи с подробными и тщательно выверенными решениями из многих разделов математики (см. подробное оглавление). Рассмотрена технология решения задач с подробными рекомендациями по использованию конкретных особенностей системы *Derive*, включая встроенные функции *Derive*, управление точностью, технологию работы с алгебраическими уравнениями, особенности построения графиков в декартовой, полярной системах координат, а также в параметрической форме и, конечно же, технологию работы с файлами. Отдельно следует отметить внимание автора к задачам с параметрами, о важности которых говорилось выше.

Часть 3. Справочные материалы.

Содержит много полезной, а часто и необходимой информации для успешного освоения и использования системы *Derive* в математических расчетах: меню системы *Derive*, подробности о командах DECLARE, FACTOR, MANAGE, функции, константы и операторы системы *Derive*, справки о клавишах, краткий англо-русский словарь системы *Derive*, (слова и выражения).

Есть и список литературы, достаточный для того, чтобы книга выполняла свое предназначение — служить учебным пособием для всех желающих познакомиться с современным и очень эффективным инструментом автоматизации всякого рода математических расчетов.

Кому же в первую очередь книга предназначена? Ответ, мы надеемся, следует из вышеизложенного — невозможно определить точно, кому ее следует взять в руки. Она полезна и даже нужна всем, кто столкнулся с проблемой автоматизации вычислений в любой области знания и крайне заинтересован в визуализации этих вычислений и быстрой и эффективной оценке влияния соответствующих параметров. В силу доступности системы *Derive* на фоне других, аналогичных продуктов как по цене, так и по неприхотливости требуемых компьютерных ресурсов, и книга, и сам программный продукт предназначены для использования самыми широкими массами пользователей.

В общем, в добрый путь вам. Желаю успехов в использовании системы *Derive* — и тем, кто учится, и тем, кто обучает.

**Черемных С. В.**
профессор, доктор технических наук,
Председатель экспертного совета издательства по направлению:
«Информатика и информационные технологии»

# ВВЕДЕНИЕ

Уважаемые читатели! Эта книга для тех, кто интересуется математикой, в первую очередь для преподавателей математики в школе и институте, а также для студентов и школьников. Изучая математическую систему Derive, я испытала много приятных минут и, уверена, что любой, кто найдет возможность изучать эту систему, тоже будет приятно удивлен ее прекрасными возможностями. Все, кто решал задачи, используя эту систему, отмечают ее следующие достоинства.

1. Система Derive — система символьной математики, то есть она умеет работать с символами, например, разлагать многочлены на множители, вычислять неопределенные интегралы и т.д. (рис. 1).

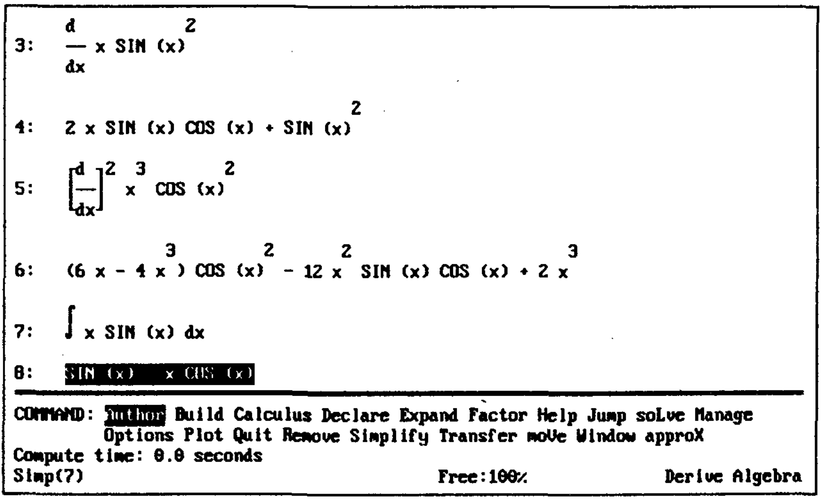



**Рис. 1**

2. Записи на экране почти ничем не отличаются от обычных записей в тетради.

3. Овладеть основными манипуляциями с системой достаточно просто.

4. Систему можно эффективно использовать при решении широкого круга задач самых различных разделов математики: геометрии, математического анализа, высшей алгебры, теории вероятностей и статистики, численных методов. Можно проводить также финансовые расчеты (рис. 2).

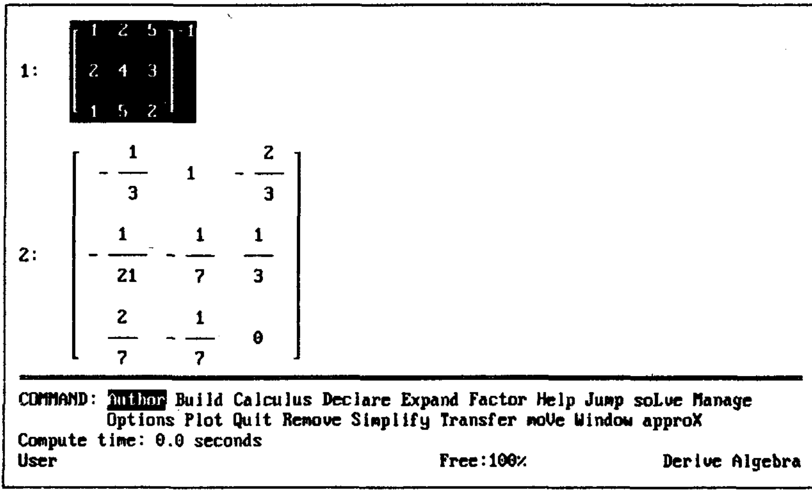



**Рис. 2.**

5. Система обладает очень хорошими графическими возможностями.

6. Система не требует больших ресурсов памяти. Ее можно установить даже на ПК класса IBM PC XT без жесткого диска. В последнее время ее устанавливают даже на карманные калькуляторы. Требуемая минимальная оперативная память 512 Кбайт, все файлы (вместе с математической библиотекой) помещаются на одной дискете емкостью 360 Кбайт.

7. В России она распространяется свободно ассоциацией пользователей математических пакетов.

8. Система уже нашла широкое применение в школах и вузах многих стран мира, в том числе и в России. Derive внедряется в школах Австрии, Словении, Южного Тироля (Италия), Португалии, Германии, Франции.

С 1994 г. за рубежом издаются специализированные журналы «Derive User Group Newsletter» и «The International Derive Journal», а также опубликовано большое число (несколько десятков) книг для пользователей системы.

Система имеет несколько десятков встроенных функций, среди которых все наиболее известные функции: логарифмическая показательная, тригонометрические, гиперболические, обратные тригонометрические и гиперболические. Имеются и другие функции, такие как:

- функции комплексного аргумента, которые позволяют находить абсолютную величину числа, действительную и мнимую части числа, комплексное сопряженное к данному числу, аргумент числа;
- комбинаторные функции: n!, число сочетаний;
- вероятностные функции;
- статистические функции;
- операции из курса математического анализа: нахождение пределов функций, производных заданного порядка, неопределенных и определенных интегралов, нахождение конечных сумм и сумм числовых рядов, бесконечных произведений;
- матричные функции, например, нахождение элементов матрицы, нахождение матрицы, обратной данной, собственного значения матрицы, вычисление сумм и произведений матриц;
- векторные функции, например, нахождение скалярного и векторного произведения векторов, определение координат вектора;
- функции дифференциального и интегрального исчисления.

Выражения вводятся примерно в таком же виде, как это делается в Бейсике, а отображаются на экране они в привычной для нас записи.

На обучение вводу и редактированию строки требуется не более 15 минут.

Интерфейс системы прост, но предоставляет пользователю большие удобства.

Любая математическая система предназначена для того, чтобы пользователь с ее помощью мог эффективно решать задачи. Главная задача данной книги — помочь желающим овладеть системой и выделить те задачи, которые подчеркивают достоинства системы и которые доступны при этом большому кругу любителей математики, прежде всего, студентам младших курсов, школьникам. В книге приведено более 300 задач с решениями, а также большое число задач для самостоятельного решения. Источником задач послужило большое число задачников и учебников по различным разделам высшей математики, а также пособия для поступающих в вузы, для учащихся школ. Ряд задач составлен автором этой книги.

Наиболее интересны, с моей точки зрения, задачи, в которых большое значение играют наглядные образы; вычислительные задачи, которые помогают осмыслить некоторые понятия математики, и задачи, важные с практической точки зрения. К первым относятся, например, задачи на построение кривых, касательных к ним, огибающих семейств кривых и т.д.; к вычислительным — задачи по теме «Степенные ряды», к практически важным — задачи на решение дифференциальных уравнений и их систем. Во многих задачах предлагается провести вычислительные эксперименты.

Книга состоит из трех разделов. Первый раздел посвящен описанию системы. Он предназначен тем, кто только начинает изучать систему. Второй раздел — это задачник. Только решая задачи, можно по достоинству оценить математическую систему. В третьем разделе — справочные материалы.

Есть много способов работы с книгой. Если вы хотите проявить самостоятельность, то вам понадобятся прежде всего первый и третий разделы. Однако следует иметь в виду, что некоторые вопросы не освещены в первой части, но, пользуясь справочными материалами, приведенными в конце книги, и подсказками системы Derive, можно прояснить для себя «темные» места. **Обязательно прочитайте** также подраздел **«Функции пользователя»** из второй части.

Книга адресуется прежде всего преподавателям математики, которые хотели бы применять компьютер при обучении своих учеников. Если вы не сможете сразу заниматься с учениками в компьютерном классе, вам самим система Derive облегчит работу: вы можете быстро составить задачи по нужной теме, отпечатать тексты и рисунки и т.д.

Приступая к решению задач с использованием системы, я испытала некоторые трудности с подбором задач. В пакет входит большое число файлов, включающих в себя функции, которые решают некоторые задачи (это так называемые файлы-утилиты). Но, по моему мнению, гораздо важнее научиться самостоятельно решать задачи, чем использовать готовые решения. Поэтому в книге описаны способы решения задач, при этом функциям даны те имена, которыми пользовалась автор. Вы, уважаемый читатель, конечно, можете использовать демонстрационные файлы, файлы-утилиты, в которых собраны решения задач. Но если вы решаете задачи для того, чтобы испытать удовольствие от работы или для того, чтобы понять, как программировать решение задачи на Derive, то лучше составить библиотеку функций самостоятельно, а готовая библиотека — для тех, кому важно быстро получить решение какой-либо задачи, например, инженерной или финансовой. В справочном разделе вы найдете краткое описание некоторых из поставляемых файлов.

## ЧАСТЬ 1
# ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМЕ DERIVE

## ЗАГРУЗКА СИСТЕМЫ. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ ПОМОЩИ. ВЫХОД ИЗ СИСТЕМЫ DERIVE

Перед началом работы переведите компьютер в режим работы с латинским шрифтом или вообще отключите доступ к русскому шрифту.

Найдите на жестком диске каталог Derive и войдите в него. Для этого установите светящийся прямоугольник — курсор на слово Derive и нажмите на клавишу ввода **Enter**. На ней нарисована стрелка ↵. В раскрывшемся каталоге найдите файл **derive.exe**, установите на него курсор и нажмите на клавишу **Enter**.

На экране появится текст — сведения о фирме, разработавшей систему, год создания системы и номер версии. Ниже этого текста слова **Press H for help** — нажмите на клавишу **H** для получения помощи. Еще ниже, под чертой, расположено главное меню системы.

Обратимся **к подсказкам системы.** Для этого, как мы уже знаем, достаточно нажать клавишу **H** (прописную или строчную — все равно). После этого на экране появляется меню системы помощи. Мы видим список пунктов, к которым можно обратиться, перед каждым пунктом стоит буква. Достаточно нажать на нужную букву, чтобы получить справку по соответствующему пункту. Например, мы хотим получить сведения о встроенных функциях системы. Нажмите на букву **F**. Появится текст. Чтобы перейти к следующей странице текста, можно нажать на клавишу — ↓ («вниз»), которая находится среди четырех клавиш управления курсором. Чтобы вернуться к прежнему тексту, можно нажать на клавишу ↑ («вверх»).

«Полистайте» текст справки. Теперь нажмите на клавишу **ESC** — вы вернетесь в меню системы помощи. Обратите теперь внимание на нижнюю часть экрана. Там вы видите текст:

**HELP: Editing Function Algebra 2D-plot 3D-plot State Resume**

Вновь обратимся к пункту **Function**. Для этого поставьте курсор на это слово и нажмите на клавишу Enter. Управление курсором при помощи клавиши **пробела** — вперед, или клавиши **BS** (или **Backspace**) — клавиши со стрелкой ← («влево»), расположенной в верхнем ряду основной клавиатуры. Вы вновь увидите тот же текст. Ниже текста вы видите записи

**HELP: Next Previous Resume**

**Next** — следующий, **Previous** — предыдущий, **Resume** — выход в меню системы помощи. Передвижение курсора осуществляется также при помощи клавиши пробела и клавиши **BS** — стрелки влево.

Итак, выбор нужного пункта меню подсказок и передвижение по тексту подсказок можно осуществлять разными способами. Потренируйтесь в получении подсказок.

Чтобы выйти из системы помощи, нажмите клавишу **ESC**. Эта клавиша играет особую роль: при отказе от выполняемых действий всегда используйте клавишу **ESC**.

Обратите теперь внимание на главное меню системы. Оно расположено под чертой. В нем написаны названия нескольких команд системы Derive. Вы видите, что в написанных словах одна буква заглавная, остальные строчные. Заглавная буква играет особую роль: **для обращения к команде достаточно ввести заглавную букву соответствующего слова**. Можно также поступить знакомым нам способом: установить на нужную команду курсор и нажать клавишу **Enter**. Передвижение курсора осуществляется теми же клавишами — пробела и **BS**.

Ниже главного меню находится строка, в которой видим запись **Enter expression** — введите выражение. Будем называть эту строку **строкой сообщений**. Еще ниже находится **строка состояния (строка статуса)**. В ней отмечено, что свободно 100% памяти, и указано **Derive Algebra**, то есть система находится в режиме алгебры.

Чтобы выйти из системы Derive, надо воспользоваться командой **Quite** главного меню. Нажмите на клавишу **Q** (заглавную или строчную). Внизу появится текст: **Abandon expression (Y/N)**? (Покинуть выражение?)

Ответьте да, то есть нажмите на клавишу с буквой **Y**.

Вновь войдите в Derive. Курсор должен находиться на имени файла derive.exe, вы должны нажать на клавишу ↵.

## РЕШЕНИЕ ПРОСТЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРИМЕРОВ

Выполним первый пример: пусть надо вычислить $\frac{7}{8}-\frac{3}{4}$. Для ввода выражений служит команда **Author**. Так как выделена буква **A**, нажмем на нее. Обратите внимание на то, что это латинская буква и, как мы уже отмечали, должен быть установлен латинский шрифт. Не имеет значения, вводится она как строчная буква или заглавная. Появится запись **AUTHOR expression:** — выражение, введенное автором (то есть пользователем), правее этих слов появляются вводимые символы, ниже, в строке сообщений, — слова **Enter expression**, что означает «введите выражение». Введем выражение в виде: 7/8—3/4, в строке ввода вы видите это выражение в таком же виде. Теперь нажмите клавишу ввода **Enter**. В дальнейшем будем ее использование обозначать символом ↵. На экране в поле алгебры появится запись:

$$1: \frac{7}{8}-\frac{3}{4}.$$

Итак, мы видим запись в привычном для нас виде. Заметим также, что строка имеет метку, в данном случае 1. Внизу экрана появилась запись **User** . Это означает, что строка 1 введена пользователем.

Действие пока не выполнено. В главном меню команды есть команда **Simplify** — упростить. Выполним эту команду. Для этого, как вы догадались, надо нажать на клавишу **S**. В строке сообщений появится сообщение: **SIMPLIFY express: #1**, то есть упрощается строка с номером 1. Фактически система запрашивает, надо ли упрощать выражение под меткой 1. Для того чтобы Derive выполнила эту команду, требуется подтверждение, что ее надо выполнить. Это делается путем нажатия на клавишу ↵. Нажмите на клавишу ввода. В окне алгебры появится запись:

$$2{:}\frac{1}{8}.$$

В строке состояния появляется запись **Simp(1)** — упрощение строки 1, а в строке сообщений — время выполнения операции.

Выполните еще один пример: 2/3 + 5/7. Вы получили ответ $\frac{29}{21}$. Представим это число в виде десятичной дроби. Для этого в меню существует команда **approX** . Воспользуется этой командой. Нажмите на клавишу **X**. Обратите внимание на запись в строке сообщений. Для того чтобы команда была выполнена, нажмите клавишу ↵. Результат: 5: 1.38095. В строке состояния появилась запись **Appro**(4).

> ***Замечание.*** Число знаков после запятой может быть иным, в зависимости от того, как установить точность; легко разобраться самостоятельно (читайте справочные материалы).

Теперь у вас в окне алгебры 5 строк. Можно передвигать курсор по строкам, используя клавиши со стрелками вверх или вниз. Нажимая на клавишу «вверх», передвиньте курсор на первую строку, при этом **внимательно следите за строкой состояния**. Вы видите, что в строке состояния появляется та запись, которая появилась вместе с соответствующей строкой. Например, если курсор находится на строке 4, в строке состояния запись **Simp**(3), если курсор на строке 3 — в строке состояния **User**. Таким образом вы можете просмотреть всю последовательность выполняемых действий, при этом Derive напомнит вам происхождение каждой строки.

Поставьте теперь курсор на строку 3, нажмите на клавиши **X** и ↵. В результате в поле алгебры появилась строка

6: 1.38095

В строке состояния появилась запись **Approx**(3). Таким образом можно вычислять приближенное значение выражения, не упрощая его перед этим.

Можно производить упрощение одновременно с вводом строки, для этого надо при вводе нажать на клавишу **Ctrl** и, не отпуская ее, на клавишу ввода **Enter** (↲). Такое действие обозначают **Ctrl+**↲. Проделайте это с придуманным вами примером.

Передвигать курсор по строкам окна алгебры можно также используя клавиши **PageUp** (на страницу вверх) и **PageDown** (на страницу вниз). Если число строк велико, то и такой способ может оказаться неудобным. В таком случае используют команду **Jump**. Воспользуемся ею немного позже. На первую строку можно попасть, нажав на клавишу **Home**, на последнюю — нажав на клавишу **End**. Нажмите сначала на клавишу **Home**, затем на клавишу **End**.

Можно упрощать только часть строки или находить приближенное значение части строки. Для этого надо научиться выделять часть строки. Это делается при помощи клавиш со стрелками ← и →, если надо выделить числитель или знаменатель дроби, используются также клавиши со стрелками ↑ и ↓. С частями строк можно производить и другие действия, об этом будет сказано позднее.

## ВСТРОЕННЫЕ ФУНКЦИИ СИСТЕМЫ DERIVE

Вы уже познакомились с системой помощи и, вероятно, обратили внимание на то, что Derive имеет большое число встроенных функций.

**1.** Вычислим, например, Sin2.

Нажмите на клавишу **A** и в появившейся строке ввода введите SIN(2). Не имеет значения, будете вы использовать строчные или заглавные буквы, в любом случае после нажатия на клавишу ↲ в поле алгебры появится запись

7 : **SIN**(2)

(при условии, что выполнялись только описанные примеры. В противном случае будет другой номер строки). Обратите внимание на то, что Derive всегда имя функции пишет заглавными букaми. В строке состояния появилось слово **User** (автор). Попробуйте упростить выражение, для этого нажмите на клавиши **S** и ↵. Вы видите, что появилась строка

$$8 : \mathbf{SIN}(2)$$

В строке состояния запись **Simp(7)**. Для нахождения искомого значения нажмите клавишу **X**. Появится строка

$$9 : 0.909297$$

В строке состояния появится запись **Approx**(8).

**2.** Вычислим теперь sin45°. Для этого нажмите клавишу **A**, введите **SIN**(45deg), нажмите клавишу ↵. В поле алгебры появилась строка

$$10 : \mathbf{SIN}(45\,°)$$

Нажмите теперь на клавиши **S** и ↵. В окне алгебры появилась строка

$$11 : \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Найдите приближенное значение Sin45° двумя способами.

**3.** Вычислите cos1, cos30°, sin50°, tg60° и т.д. В случае необходимости воспользуйтесь системой помощи.

**4.** Найдем значение arctg1. Введите в строке ввода **ATAN**(1), нажмите на клавиши ↵ **S** ↵. Результат $\frac{\pi}{4}$. Если у вас не выполнено полного отключения русского шрифта, то вместо этого на экране появится результат: $\frac{у}{4}$. Либо вы должны каждый раз перед работой с системой Derive отключать возможность работы с русским шрифтом, либо привыкнуть к другим обозначениям числа $\pi$, мнимой единицы и некоторым другим. Смотрите в справочной части о вводе греческих букв, там указано, какими буквами они отображаются на экране при не отключенном русском шрифте.

*Замечание*. Возможно появление ответа уу, где одно у означает число π, а другое — переменную у. Если у вас появились сомнения, можно, например, выполнить **X** ↵, тогда число π будет заменено его приближенным значением. Или попытаться выполнить замену: переменную у можно заменить, а число π — нет, в последнем случае будет отказ выполнять это действие. О том, как выполняются замены, читайте ниже.

**5.** Вычислим arctg2. Введите **ATAN**(2) и нажмите **S** ↵. Что произошло? Найдите приближенное значение arctg2. Для этого нажмите на клавиши **X** ↵.

Найдите несколько значений обратных тригонометрических функций. Используйте систему помощи для наведения справок.

## ЗАДАЧИ

**Упражнение 1.**

Ввести $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2x}$.

*1-й способ*. **Alt+q**(x^2 + y^2) / (2x) ↵.

Таким образом, квадратный корень можно ввести, нажав на клавиши **Alt+Q**.

*2-й способ*. Это выражение можно ввести также следующим образом:

**SQR**(*x*^2 + *y*^2) / (2*x*) ↵.

**Упражнение 2.**

Вычислите $\sin\dfrac{\pi}{6}$.

*Указание*. Число $\pi$ можно ввести двумя способами.

*1-й способ*. **Alt+p.**

*2-й способ*. Ввести (буквами) **pi**.

Если не отключена возможность использовать русский шрифт, на экране появится у.

**Упражнение 3.**

Ввести $e^{-x^2}$.

*1-й способ.* **Alt+e**^(—$x$^2).

*2-й способ.* Ввести **EXP**(—$x$^2).

Если не отключена возможность использовать русский шрифт, на экране появится $И^{-x^2}$.

Фундаментальную роль при решении задач в системе Derive играют функции пользователя. Об этом читайте во второй части книги.

## УДАЛЕНИЕ НЕНУЖНЫХ СТРОК

В поле алгебры у вас уже довольно много строк. Воспользуемся командой **Jump** для перехода, например, на строку 5. Нажмите на клавишу **J**. Под чертой появится запись **JUMP to**: , а в строке сообщений — указание **Enter label number**, то есть требуется ввести метку строки. Введите число 5 и нажмите на клавишу ↵. Курсор в поле алгебры установится на строку 5.

Научимся удалять ненужные строки. Это выполняется при помощи команды **Remove**. Нажмите на клавишу **R**. Под чертой появляется запись **REMOVE: Start**: 5 **End**:5. После слов **Start** (начало) и **End** (конец) указан номер строки, на которой стоит курсор. В строке сообщений запись **Enter label number** (введите номер-метку выражения). Если теперь вы нажмете на клавишу ↵, строка с номером 5 будет удалена. Сделайте это и убедитесь, что теперь в поле алгебры нет строки с меткой 5. Затем удалите строки 1—4. Вновь нажмите на клавишу **R**. Обратите внимание на то, что после слова **Start** под номером мелькает маленький курсор, указывающий, куда будет внесена метка строки, если вы его будете исправлять. Введите 1, затем нажмите на клавишу **Tab**, маленький курсор переместится под номер после слова **End**, введите 4. Чтобы удалить строки 1—4, надо нажать клавишу ↵.

Вновь нажмите клавишу **R**. Несколько раз нажмите на клавишу **Tab**, следите при этом за курсором строки ввода. Что при этом происходит? Удалите еще несколько строк. Обратите внимание, что номера удаляемых строк можно указывать в любом порядке. Например, после слова Start можно ввести номер 10, а после слова End — номер 6.

Попробуйте после этого воспользоваться командой **Jump**, указав при этом номер удаленной строки. Сделайте вывод.

## ПЕРЕДВИЖЕНИЕ КУРСОРА ПО СТРОКЕ В ПОЛЕ АЛГЕБРЫ

Если строка длинная, всю ее может быть не видно на экране. В случае необходимости можно ее просмотреть по частям. Для этого выделите часть строки с помощью клавиш со стрелками ← и →, теперь этот урезанный курсор можно передвигать вдоль строки вправо и влево, нажав на клавиши **Ctrl+F** и **Ctrl+A.** Потренируйтесь в этом.

## РЕДАКТИРОВАНИЕ ВВОДИМОЙ СТРОКИ

Часто возникает необходимость внести изменения в вводимую строку. Мы уже обращали внимание на маленький курсор в строке ввода. Его можно перемещать по этой строке, используя клавиши **Ctrl+A, Ctrl+S, Ctrl+D, Ctrl+F**.

Введите в строку ввода какое-либо выражение. Например, введем $(x^4 - 5x)(x^2 + 1)$ . Для этого в строке ввода введите (*x*^4 —5*x*)(*x*^2 + 1). То есть выражение вводится в таком же виде, в каком это делается, например, на языке Бейсик, но знак умножения вводить не обязательно. Нажмите на клавишу **Ctrl** и, не отпуская ее, нажмите на клавишу **A** (все равно строчную или прописную) несколько раз, следите за маленьким курсором в строке ввода, затем вместо клавиши **A** нажимайте на клавишу с буквой **S**. Попробуйте все указанные комбинации и сделайте выводы. Вы можете обратиться к системе подсказок, если забудете комбинации клавиш.

Внесите изменения, например, во вторых скобках должно быть (x^2 + 2x). Надо убрать один символ и вставить 2x. Удаление символов производится клавишами **Delete** или **←Backspace**. Поставьте курсор в строке ввода на любой символ и нажмите сначала на одну из этих клавиш несколько раз, затем на другую. Наблюдайте за строкой ввода и сделайте выводы. Попытайтесь ввести несколько символов, следите при этом за строкой ввода. Результаты зависят от того, включен или выключен режим вставки. Этот режим включается и выключается при помощи клавиши **Insert**. Нажмите несколько раз на эту клавишу, следите при этом за строкой состояния. Если режим вставки включен, в строке состояния есть сообщение **Insert**, если режим вставки выключен, это сообщение отсутствует. Вводите символы в обоих режимах и наблюдайте за результатами. Ваша цель — получить в строке ввода выражение (x^4 — 5x)(x^2 + 2x). После того как вы его получите, нажмите на клавишу ↵ и убедитесь, что в поле алгебры $(x^4 - 5x)(x^2 + 2x)$.

## КОПИРОВАНИЕ СТРОКИ

Часто возникает необходимость копировать строку или ее часть. Для этого служат клавиши **F3** и **F4**.

Чтобы скопировать строку:

1) установите в окне алгебры курсор на копируемую строку;

2) нажмите на клавишу **F3**, копируемое выражение появляется в строке ввода;

3) введите это выражение, нажав ↵, или отредактируйте его, а затем введите.

Для того чтобы копируемое выражение сразу разместить в скобках, используйте клавишу **F4**.

Точно так же копируется часть строки, перед копированием эту часть надо выделить курсором.

Далее подробно рассказывается о других применениях функциональных клавиш F3 и F4 и о копировании части строки.

# ВЫПОЛНЕНИЕ ОПЕРАЦИЙ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ

Прежде чем выполнять действия с алгебраическим выражением, полезно упростить его (**S** ↵). Если Derive переписывает строку в том же виде, значит упростить ее он не может.

## Разложение на множители. Команда Factor

Пусть требуется разложить на множители многочлен $x^3 - 8x$. Эта задача решается при помощи команды **Factor**.

**1.** Введите в окно алгебры данный многочлен.

Для этого нажмите **A**, введите $x$^3 — 8$x$ в строку ввода, нажмите на клавишу ↵. В окне алгебры появится строка

$$20 : x^3 - 8x$$

(метка условная ).

**2.** Нажмите на клавишу **F**.

В строке под чертой появится запись **FACTOR expression:** #20, в строке сообщений указание **Enter expression**. Маленький курсор мигает под номером строки. Вы уже догадались, что номер можно поменять. Так как мы хотим разложить на множители многочлен, внесенный в строку с меткой 20, подтвердим свое требование, нажав на клавишу ↵. Появляется подменю команды **Factor**. Не только эта команда имеет подменю, но и многие другие, о чем речь впереди.

Теперь в строке под чертой мы видим записи

**FACTOR: Amount: Trivial Squafree Rational raDicals Complex**

В строке сообщений имеется запись **Select amount of factory**. Выберем пункт **Rational**. Для этого нажмите на клавишу **R**. В поле алгебры появится

$$21 : x(x^2 - 8).$$

В строке состояния появилась запись **Fact**(20) .

Вернитесь к строке 20. Разложим теперь данный многочлен на множители, используя команду **Factor raDicals**. Поставьте курсор на строку 20, нажмите на клавишу **F**, затем, когда откроется подменю, — на клавишу **D**. В поле алгебры появится:

$$22 : x(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2}).$$

Разложите на множители несколько многочленов, например, $x^3+1$, $x^2+1$ и т.д. Используйте разные пункты подменю **Factor**. Сделайте выводы. Смотрите также описание меню в приложениях.

Команду **Factor** можно использовать также для разложения целых чисел на множители. Введите число —148. Нажмите **F**. В поле алгебры появится ответ: $-2^2 37$.

## Раскрытие скобок. Команда Expand

Обратные действия по отношению к команде **Factor** выполняются при помощи команды **Expand.** Слово expand переводится как «разложение по степеням».

Установите курсор на строке с числом $-2^2 37$ и нажмите на клавиши ↵ **E** . В поле алгебры появится ответ $-148$.

Установите курсор на строке 22 и нажмите на клавиши **E** ↵. В поле алгебры будет ответ: $x^3-8x$.

Потренируйтесь теперь в копировании строк и их частей.

Установите курсор на строке 22, нажмите на клавишу ↵, а затем на клавишу **F3**. В строке ввода появится выражение $x(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})$ в таком виде, в каком мы его видим в поле алгебры. Осталось подтвердить необходимость ввода клавишей ↵. Обратите внимание на запись в строке состояния: там появилось **User**.

Скопируйте теперь часть строки и посмотрите, какая запись появилась в нижней строке, строке состояния. Вы видите, что признаком того, что действие произведено с частью строки служит добавление к номеру метки строки символа $'$.

Перемножим многочлены $x^3-8x$ и $x^2+1$.

Установите курсор на строку с первым многочленом, нажмите на клавишу **F4** — в строке ввода появится выражение $(x^3-8x)$, теперь, используя клавишу управления курсором «вверх», установите курсор на строку с многочленом $x^2+1$, нажмите на клавишу **F4**. В строке ввода — выражение $(x^3-8x)(x^2+1)$. Нажмите клавишу ↵, это выражение появилось в поле алгебры. Нажмите на клавишу **E** , в поле алгебры видим результат: многочлен $x^5 - 7x^3 - 8x$.

Установите курсор на строку с выражением $(x^3 - 8x)(x^2 + 1)$, нажмите на одну из клавиш управления курсором «влево» или «вправо» и наблюдайте за курсором: он уменьшится в длину и будет подсвечивать только один из множителей. Теперь нажмите на клавишу «вниз» — выделится $x^3$, еще раз нажмите на клавишу «вниз», затем нажмите на клавишу «вверх». Поупражняйтесь в выделении части выражения.

Введите в поле алгебры дробь $\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1}$. Для этого в строку ввода введите (x^3 — 4x) / (x^2 – 1) ↵. Выделите курсором числитель, разложите числитель на множители. Для этого нажмите на клавишу **F** и затем на клавишу **R**. В дальнейшем в таком случае будем говорить «нажмем на клавиши **F R**». Вновь установите курсор на дробь, нажмите на клавиши **F R**. На множители разложились и числитель, и знаменатель.

При помощи команды **Expand** также можно разлагать дроби на простейшие дроби. Разложим дробь $\frac{1}{(x+2)(x+1)}$ на простейшие дроби. Для этого введите в строке ввода 1 / ((x + 2)(x+1)) и нажмите на клавишу ↵. Теперь нажмите на клавиши **E** ↵ . В поле алгебры мы видим ответ:

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

## Выполнение подстановок

Выполнение подстановок — важнейшая операция, выполнять ее приходится очень часто, особенно при решении серьезных задач. Подстановки выполняются при помощи команды **MANAGE Substitute**. Команда **Manage** находится в главном каталоге, команда **Substitute** — в ее подкаталоге.

Введите выражение $\sin x + \cos 2x$. Заменим в этом выражении $x$ на $5t$. Для этого нажмите на клавишу **M**, раскроется подкаталог команды. В строке сообщений текст Enter option — выберите опцию. Нажмите на клавишу **S**, в строке под чертой появится текст

**SUBSTITUTE value:x**

(замещается переменная $x$). В строке сообщений появляется указание **Enter replacement for** $x$ — введите выражение вместо $x$. Введите $5t$ и нажмите на клавишу ↵. В результате в поле алгебры видим выражение $\sin(5t) + \cos(2(5t))$ . Упростите его, для этого нажмите на клавишу **S**. В результате в поле алгебры видим $\cos(10t) + \sin(5t)$ . Вычислим значение этого выражения при $t = 2$. Для этого сделаем замену в данном выражении $t$ на 2. Нажмите на клавиши **M S** ↵, введите **2**. В поле алгебры $\cos(20) + \sin(10)$. Для вычисления приближенного значения этого выражения нажмите на клавиши **X** ↵. Результат: – 0.936.

При замене некоторого выражения другим выражением или числом используются клавиши **F3** и **F4**.

### Выполните упражнения

#### Упражнение 1.

1. Введите $(x + y)^2 + x + y + 3$.

2. Выделите во введенной строке курсором $x + y$ (внутри скобок) при помощи клавиш со стрелками.

3. Нажмите M S ↵, введите t ↵. Результат: $t^2 + x + y + 3$.

Знаки препинания вводить не надо.

#### Упражнение 2.

1. Введите $(x + y)^2 + (x + y) + 3$ и проделайте те же действия. Результат должен быть $t^2 + t + 3$.

#### Упражнение 3.

1. Введите $\sin^2 x + 3\sin x$. В поле алгебры это выражение имеет вид: $\sin(x)^2 + 3\sin(x)$.

2. Выделите $\sin(x)$ при помощи клавиш со стрелками.
3. Нажмите M S ↵, введите $t$ ↵. Результат: $t^2 + 3t$.

**Упражнение 4.**

1. Введите $z^3 + z^2 + 5z$.
2. Выделите $z$.
3. Нажмите M S ↵, введите sin($x$) ↵ [ или sin $x$ ↵].

Результат: $\sin(x)^3 + \sin(x)^2 + 5\sin(x)$.

**Упражнение 5.**

В выражении $z^3 + z^2 + 5z$ выделите $z^2$ и замените это слагаемое на sin($x$).

***Следует помнить, что перед выполнением подстановок надо выполнить упрощение строки (если оно возможно).*** Например, прежде чем делать подстановку в выражение $\frac{4 - x^2}{x + 2}$, надо его упростить.

## Перенос строк

Довольно часто возникает необходимость переносить строки в поле алгебры. Для этого служит команда **moVe**.

Пусть некоторую строку, например с меткой 20, надо поместить перед строкой с меткой 5.

**1.** Установите курсор поля алгебры на переносимую строку.

**2.** Нажмите на клавишу **V**. Откроется подменю этой команды:

**Befor**:20 **Start**:20 **End**:20

**Befor** — перед, **Start** — начало, **End** — конец.

**3.** Введите после слова **Befor**: число 5, лишние цифры уберите, или сначала уберите число 20, нажав на клавиши **Ctrl+Y**, затем введите 5.

**4.** Нажмите на клавишу ↵.

Убедитесь в том, что строка с меткой 20 находится перед строкой с меткой 5. Вы видите, что все строки сохранили свои метки.

Действия 1 и 2 можно выполнять в обратном порядке.

Можно было, не устанавливая курсора на строке, указать все номера меток: **Befor**:5 **Start**:20 **End**:20 (перевод курсора клавишей **Tab**).

Пусть надо разместить строки с метками 25—30 перед строкой с меткой 10, причем строки размещены по порядку, последовательно от 25 до 30. Это также можно сделать двумя способами.

*1-й способ.*

**1.** Установите курсор поля алгебры на строке с меткой 25.

**2.** Нажмите на клавишу **V**.

**3.** После слова **Befor**: введите 10.

**4.** Используя клавишу **Tab**, переместите курсор строки ввода в позицию после слова **End**.

**5.** Стрелкой ↓ переместите курсор поля алгебры на строку с меткой 30. При этом после слова **End** появится число 30.

**6.** Нажмите ↵.

*2-й способ.* Нажмите на клавишу **V**, укажите все нужные числа и нажмите ↵.

## УПРАВЛЕНИЕ ТОЧНОСТЬЮ

Команда **OPTION PRECISION** позволяет выбрать три режима вычислений:

**Approximate** — приближенный,
**Exact** — точный,
**Mixed** — смешанный,

а также указать количество цифр в записи числа (**DIGITS**):

**OPTIONS PRECISION:Mode:Approximate Exact Mixed Digits:<число>**

По умолчанию используется режим **Exact** . В этом случае иррациональные числа представлены в символьной форме.

В режиме **Mixed** иррациональные числа заменяются дробями, а рациональные операции выполняются точно. Можно указать количество значащих цифр в приближениях иррациональных чисел, но при этом время вычислений растет как квадрат этого числа.

В режиме **Approximate** все дроби округляются с заданной точностью и вычисления производятся с максимально возможной скоростью. В процессе вычисления могут встретиться ситуации, когда невозможно сохранить нужное количество верных значащих цифр. Тогда вычисления останавливаются и выдается сообщение **CATASTROPHIC CANCELLATION**.

## УПРАВЛЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ЧИСЕЛ

В системе Derive возможны несколько способов представления чисел на дисплее или в распечатке. Выбор представления осуществляется при помощи команды **OPTIONS NOTATION.**

**OPTIONS NOTATION:Style:Decimal Mixed Rational Scientific**
**Digits:**<число>

Дроби можно представлять как числа с десятичной точкой (**Decimal**). При рациональном представлении (**Rational)** целые числа представляются как целые, а дроби — как отношения целых чисел. Очень большие и очень маленькие по модулю числа можно представлять в показательной форме (**Scientific**). Можно представлять числа в смешанной форме (**Mixed**), когда система сама выбирает способ представления.

Можно также задавать число знаков после десятичной точки и количество значащих цифр в показательной форме записи числа. Это количество может не совпадать с тем, что указано командой **OPTION PRECISION**.

При выполнении **OPTION PRECISION** способ представления выбирается автоматически:

Exact=Rational
Approximate=Scientific
Mixed=Mixed

При этом количество цифр соответствует заданному этой командой. Если надо установить другое представление, выполните команду **OPTIONS NOTATION.**

# РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Для решения несложных уравнений и систем уравнений используется команда **soLve**. При обращении к этой команде достаточно нажать на букву **L**.

**Пример 1.** Решим уравнение $x^2 - 4x = 0$. Введите в поле алгебры уравнение или только его левую часть. Нажмите на клавишу **L**, затем на клавишу ↲. В поле алгебры появляются два ответа в разных строках под разными номерами: $x = 4$ и $x = 0$.

Корни многочленов всегда можно найти таким способом.

**Пример 2.** Решим систему $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 2x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$

Введем систему в виде $[x + y - 5 = 0,\ 2x + 3y - 4 = 0]$. Нажмите на клавишу **L**, затем на клавишу ↲. В поле алгебры видим ответ: $[x = 11,\ y = -6]$.

# ГРАФИЧЕСКИЕ ВОЗМОЖНОСТИ СИСТЕМЫ DERIVE

Прежде чем перейти к построению графиков функций, следует перевести дисплей в режим графики. В главном меню выберите команду **Options**, для этого нажмите на клавишу с буквой **O**, в открывшемся подменю выберите опцию **Display**. Откроется подменю

**DISPLAY:Mode:Text Graphics Resolution:Medium(High)**
**Adapter:** (перечислены виды адаптеров)

Мы видим, что должны выбрать режим (текстовый Text или графический Graphics), разрешение адаптера (Resolution) и вид адаптера (монитора). Нажмите на пробел несколько раз, следите при этом за курсором, подсвечивающим слова в строке ввода. Вы видите, что он передвигается только в пределах опции **Mode**. Чтобы перейти к выбору разрешения адаптера, надо нажать на клавишу **Tab**. Таким образом, чтобы перейти в режим графики 2D-plot, вы должны теперь нажать на клавишу пробела, на клавишу **Tab**, снова на клавишу **Tab**, при помощи клавиши пробела выбрать нужный тип монитора и нажать на клавишу ↵.

## Построение графиков функций, заданных в декартовой системе координат

Построим график функции $y=x^2-4$. Введите в окне алгебры это равенство. Теперь надо перейти в режим построения плоских кривых. Для этого служит команда главного меню **Plot**. Нажмите на клавишу с буквой **P**. Вы видите на месте поля алгебры поле графики. Под чертой открылось меню графического режима.

**COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window Zoom**

В строке сообщений запись **Enter options** . В строке статуса сообщения

**Cross** *x*: (число) *y*: (число) **Scale** *x*: (число) *y*: (число) Derive 2D-plot

Последнее означает, что Derive находится в режиме 2D-plot, режиме построения плоских кривых.

Вы, вероятно, уже догадались, что для построения графика функции надо выбрать команду **Plot**. Нажмите на клавишу **P**. На экране будет построен график функции $y = x^2 - 4$. Нажмите на клавишу **F9** несколько раз, следите при этом за числами после слова **Scale** *x*: *y*: (следом за *x* и *y*) в строке состояния. Эти числа указывают текущий масштаб, равный числу единиц между соседними метками на экране. Затем несколько раз нажмите на клавишу **F10** и также следите за этими числами. Вы заметили, что при нажатии на клавишу **F9** график функции будет перечерчен в увеличенном масштабе, а при нажатии на клавишу **F10** — в уменьшенном масштабе, при этом числа, указывающие увеличение, меняются. Исследуйте, какое влияние на вид кривой оказывает нажатие на клавишу **F7** и на клавишу **F8**. Следите внимательно за числами, указывающими масштаб по ординате. Управлять масштабом можно также при помощи команды **ZOOM.** В режиме **IN** происходит увеличение, а в режиме **OUT** — уменьшение. Менять масштаб можно также при помощи команды **Scale**. Используя эту команду, можно установить разный масштаб по координатным осям. Во второй части книги не раз рассматриваются такие ситуации.

Нажмите теперь несколько раз на клавишу **P**. Каждый раз график будет перечерчиваться новым цветом. График этой функции строится очень быстро. В тех случаях, когда график строится медленнее, имейте в виду, что при увеличении или уменьшении графика или при перечерчивании его другим цветом нет необходимости дожидаться, пока он будет достроен. Нажимайте на нужную клавишу нужное число раз.

Вы, конечно, обратили внимание на крестик в поле графики. Будем его в тексте обозначать «+». Координаты этого крестика указываются в строке состояния после слова Cross (их называют кросс-координатами), сам крестик называют ***указателем кросс-координат***. Этот указатель можно передвигать по полю графики разными способами. Один из них — передвижение «+» при помощи четырех клавиш управления курсором. Передвигайте «+» и следите при этом за кросс-координатами. Установите «+» в точку минимума графика и определите координаты этой точки. Найдите нули функции $y = x^2 - 4$, используя «+».

Таким образом, ясно, что, используя «+», мы можем решать уравнения графически.

При помощи «+» мы можем также переносить на экране начало координат. Передвиньте «+» в точку минимума графика функции и выберите команду **Center** меню. Точка, в которой установлен «+», будет установлена в центре поля графики, соответственно будет перечерчен и график.

Удалим график и построим после этого три графика в одной системе координат.

Для удаления графика служит команда меню **Delete**. Нажмите на клавишу с буквой **D**. Откроется подменю этой команды:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **DELETE:** | **All** | **Butlast** | **First** | **Last** |
| **Удалить:** | **Все** | **Все кроме последнего** | **Первый** | **Последний** |

Курсор меню установлен на слове All, поэтому можно просто нажать на клавишу ↵.

Поле графики очищено. Перейдем в режим алгебры для ввода выражений новых функций. Для этого служит команда **Algebra** меню режима 2D-plot. Так как курсор меню установился на это слово, вновь достаточно нажать на клавишу ↵.

Введите в поле алгебры равенство $y = x^3 - 5x + 6$ или просто выражение $x^3 - 5x + 6$. Постройте график этой функции. Для этого, как вы знаете, достаточно нажать на клавишу **P** последовательно два раза. Установите «+» в точку пересечения этого графика с осью ординат, нажмите на клавишу с буквой **C**, добейтесь увеличения, при котором указано **Scale** $x$:2 $y$:2 . Вернитесь в поле алгебры и введите равенство $y = \sin x + 2$. Для построения этого графика надо проделать то же, что и при построении предыдущего. То есть надо два раза нажать на клавишу **P**. Проделайте это. Теперь на экране вы видите два графика, причем они начерчены разными цветами, что очень облегчает работу с ними.

**Задача**. Решите уравнение $x^3 - 5x + 6 = \sin x + 2$, используя «+».

Выйдите в режим алгебры и вновь войдите в режим графики. Вы видите, что оба графика вновь вычерчиваются, причем теми же цветами.

Вернитесь в режим алгебры и введите в поле алгебры выражение $x^4 - 4x^3$. Постройте график этой функции. Для этого нажмите на клавишу **P** два раза. Вы видите на экране графики трех функций. Перечертите графики так, чтобы хорошо была видна точка минимума последней кривой. Для этого сместите вниз «+» и нажмите на клавишу с буквой **C**.

Предположим, по каким-то причинам нас не устраивает цвет графика функции $y = \sin x + 2$. Вернитесь в режим алгебры, поставьте курсор меню на строку с этой функцией и нажмите на клавишу **P** два раза. График функции $y = \sin x + 2$ будет начерчен новым цветом, цвета остальных графиков сохранятся.

Обратите внимание на то, что при вычерчивании графика в окне сообщений появляется запись

**Plotting expression (номер выражения) in color (цвет выражения)**

Эти сообщения очень помогают в тех случаях, когда на экране долго не появляется графика: по ним вы можете сориентироваться, чертится ли нужный вам график.

Удалим графики, кроме последнего. Для этого нажмите **D** (**Delete**), выберите **Butlast** клавишей пробела и нажмите на клавишу ↵ или сразу нажмите на клавишу **B**. Вы видите, что сначала все три графика исчезли, затем последний вновь вычерчивается. Удалите оставшийся график. Если после нажатия на клавишу с буквой **D** вы вновь выберете **Butlast**, то график не будет удален. Для удаления его можно нажать на букву **A** (**All**) или **F** (**First**). Так как курсор меню устанавливается на All, удобнее всего нажать на клавишу ↵.

Вернемся к вопросу о перемещении указателя кросс-координат «+». Его можно передвигать вверх и вниз при помощи клавиш **PageUp** и **PageDown**, влево и вправо при помощи клавиш **Ctrl+A** и **Ctrl+F**. Введите в окно алгебры $x^3 - 9x$ и постройте график этого многочлена (**Scale** $x$:5 $y$:5). Используя клавиши «влево», «вправо», **PageUp** и **PageDown**, установите указатель «+» в точку максимума кривой. Определите координаты этой точки.

Указатель «+» можно поставить в нужную точку, указав координаты этой точки. Для этого используют команду **Move** (меню графического режима).

Точные координаты точки минимума кривой $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$. Нажмите на клавишу **M** (в графическом режиме), в строке ввода откроется подменю команды **Move**:

**MOVE: x:(число) y:(число)**

В строке сообщений появляется запись

**Enter cross coordinates** (введите кросс-координаты)

Вы должны указать нужные координаты для указателя «+». Прежние значения координат можно удалить при помощи нажатия на клавиши **Ctrl+Y**, то есть надо нажать на клавишу **Ctrl** и, не отпуская ее, нажать на клавишу **Y**. После этого введите число $\sqrt{3}$. Как вы знаете, знак квадратного корня можно ввести, нажав на клавиши **Alt+Q**. Для ввода координаты $y$ надо нажать на клавишу **Tab**, удалить предыдущее число (**Ctrl+Y**) и ввести число $-6\sqrt{3}$. Заметьте, что при этом в строке статуса высвечиваются координаты той точки, в которой находится «+». Нажмите на клавишу ↵. Проверьте, установился ли «+» в нужную точку. Обратите внимание на строку статуса.

Нажмите вновь на клавишу **M.** Вы видите, что в строке ввода указаны приближенные значения чисел $\sqrt{3}$ и $-6\sqrt{3}$. Конечно, вы могли бы сразу указать приближенные значения кросс-координат, предварительно вычислив их (в режиме алгебры).

Центрируйте рисунок (C ↵) и «приблизьте» график. Измените только ординату указателя «+» и вновь центрируйте рисунок.

В том случае, если вы хотите изменить только часть цифр, курсор строки ввода можно передвигать точно так, как это делается при редактировании строки в режиме алгебры, и точно так же вносить исправления.

На вид графика влияет установленная точность (детальность) его построения. Она регулируется командой **OPTION ACCURACY**. Можно строить график не всего выражения, а только его части, выделенной курсором поля алгебры.

При работе не забывайте использовать описание меню, в нем вы найдете ответы на многие вопросы, так как перевод команды точно указывает на ее предназначение. В справочной части книги вы найдете также таблицу управляющих клавиш.

В некоторых случаях можно строить график не самой функции $f(x)$, а некоторой функции от данной функции, обычно строят график функции $\log_2 f(x)$, $\ln f(x)$ или $\mathrm{arctg} f(x)$. Нетрудно догадаться, что это дает.

В графический режим можно перейти также, используя клавишу **F2**.

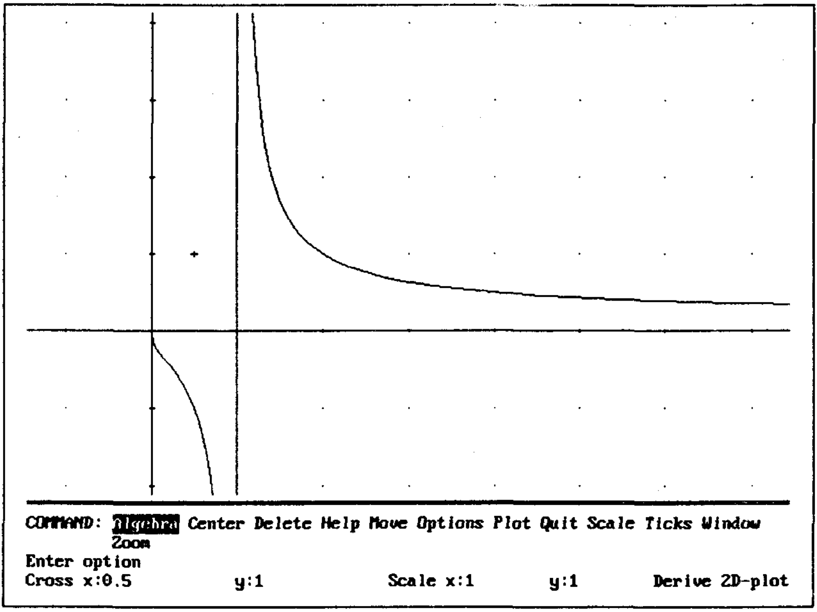

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
Zoom
Enter option
Cross x:0.5 y:1 Scale x:1 y:1 Derive 2D-plot

**Рис. 3**

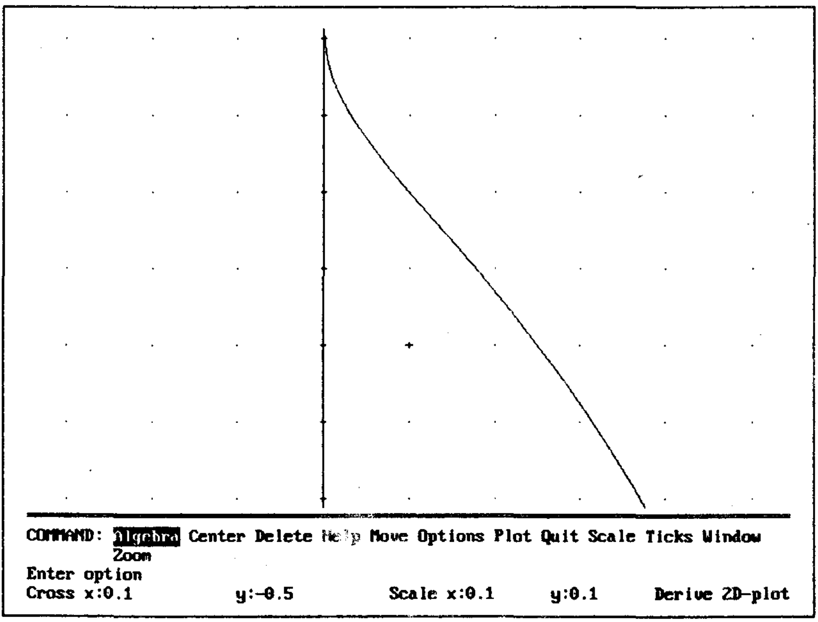

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
Zoom
Enter option
Cross x:0.1 y:-0.5 Scale x:0.1 y:0.1 Derive 2D-plot

**Рис. 4**

На рис. 3 и 4 приведен график функции $1/\log_2 x$ при разных увеличениях. На рис. 4 хорошо видна точка перегиба.

Обратите внимание на кросс-координаты, то есть на координаты указателя «+» и на его положение.

## ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Пусть требуется построить кривую $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$ при $t \in [0;2\pi]$.

**1.** В режиме алгебры введите $[t - \sin t, 1 - \cos t]$.

**2.** Нажмите клавишу **P** (Plot). Как всегда, это переход в режим графики.

**3.** Снова нажмите на клавишу **P** (Plot). Откроется подменю команды **Plot**:

**PLOT: Min: Max: Mode(Continuous) Step Points:**

В строке сообщений: Enter parameter domain.

Требуется указать наименьшее и наибольшее значение параметра $t$ и режим построения кривой: непрерывной линией или отдельными точками, в последнем случае после слова Points надо указать число точек. Здесь в скобках стоит слово Continuous, следовательно, выбран режим построения непрерывной линии.

Вы уже знаете, что если после слова стоит двоеточие, то для перехода к следующему слову надо нажать на клавишу **Tab**.

**4.** Введите после слова **Min:** число 0, после слова **Max:** число $2\pi$. Как и обычно, для удаления символов используйте клавиши **Delete** и **Backspace**, для удаления всех символов — клавиши **Ctrl+Y**, для перемещения курсора строки ввода — клавиши **Ctrl+F, Ctrl+D, Ctrl+A, Ctrl+S**.

**5.** Нажмите клавишу ввода ↲ (**Enter**).

Все остальные действия с графиком такие же, как и при построении кривых, заданных в декартовой системе координат (центрирование, выбор цветов, изменение масштаба, удаление, построение второй кривой и т.д.).

Постройте теперь эту кривую при $t \in [-\pi; \pi]$.Эта кривая называется ***циклоидой.***

Более подробно эта тема рассмотрена во второй части книги.

## ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ, ЗАДАННЫХ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Пусть требуется построить кривую $r = 1 + \cos t$.

**1.** В режиме алгебры введите $r = 1 + \cos t$ или $1 + \cos t$.

**2.** Нажмите на клавишу **P**. Если вы работаете с версией 1.57 или с версией 2.06, откроется меню режима 2D-plot. Если вы работаете с версией 2.6, откроется подменю команды **PLOT**:

**PLOT:Beside Under Overlay**

Прежде чем продолжить работу, вы должны указать, как расположено окно графики 2D_plot: рядом с окном алгебры (справа от него), вверху, над окном алгебры, или покрывать окно алгебры. Выберите **Overlay**, внизу появится меню окна 2D_plot.

**3.** Нажмите на клавишу **O** (Options). Если вы работаете в версии 1.57, нажмите на клавишу **T** (Type). Откроется подменю этой команды:

**TYPE:Coordinates:Rectangular Polar**

В строке сообщений: **Select coordinate type**.

Вы должны указать тип координат: прямоугольные или полярные.

Если вы работаете в версии 2.02 или в версии 2.6, то выберите команду **State**. Откроется подменю этой команды:

**OPTIONS STATE:Coordinates:Rectangular Polar**
**Mode:Connected Descrete Size:Large Small**

**4.** Выберите команду **Polar**.

**5.** Нажмите на клавишу **P**. Откроется подменю команды (как в случае, когда строим кривую, заданную параметрически):

**PLOT: Min: Max: Mode(Continuous) Step Points:**

**6.** Укажите наименьшее и наибольшее значения параметра $t$, то есть 0 и $2\pi$.

**7.** Нажмите на клавишу ввода ↵ (**Enter**).

Построенная кривая называется ***кардиоидой***.

Все остальные действия с графиком обычные, как в прямоугольной системе координат.

С необходимостью строить кривые, заданные в полярной системе координат, вы встретитесь при решении многих задач, рассмотренных во второй части книги.

## ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Несколько примеров функций двух переменных вы найдете в файле plot3d.mth. Используем этот файл как демонстрационный, для этого загрузим его с расширением Demo.

**1.** Переведите дисплей в графический режим работы: нажмите **O** (Options) **D** (Display) **G** (Graphic) и т.д.

**2.** Нажмите на клавишу **T** (Transfer). Откроется подкаталог этой команды.

**3.** Выберите команду **Demo**.

**4.** Введите имя файла **plot3d** и нажмите на клавишу ввода ↵.

Загрузятся первые две строки файла. В строке ввода написано «**To plot this, press Esc, then press P twice**», то есть «чтобы построить эту поверхность, нажмите на Esc, затем нажмите дважды на клавишу P». В строке сообщений «нажмите на любую клавишу, чтобы продолжить». Нажмите, например, на клавишу «стрелка вниз» ↓. В строке сообщений появляются названия поверхностей, например, две горы, гора и кратер, сомбреро. При желании вы можете просмотреть все названия, при этом в окне алгебры появятся все строки файла.

Выберите какую-либо из строк, например, «сомбреро»:

$$\frac{\cos\left[\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}\right]}{x^2+y^2+3}.$$

Установите на этом выражении курсор окна алгебры.

**1.** Нажмите на клавишу **P**. Откроется меню окна 3D-plot:

**COMMAND:Algebra Center Eye Focal Grids Hide Length Options Plot Window Zoom**

(см. также в справочном разделе описание меню.) Обратите внимание, что в строке состояния указано, что открыто окно 3D-plot.

**2.** Снова нажмите на клавишу **P**. Derive начинает вычислять значения функции по заданной сетке, соответствующие точки соединяются отрезками прямых. Так как вычисления занимают больше времени, чем при построении графиков функций в окне 2D-plot, то можно в строке сообщений прочитать, чем занята система. Чтобы прервать процесс, достаточно нажать на клавишу **ESC**.

Положительные направления осей помечены буквами X, Y, Z на рис. 5. Оси можно не изображать, для этого надо в команде **OPTION AXES** установить параметр **NO** перед построением графика или повторить построение, снова нажав на клавишу **P**.

Убрать или не убирать «невидимые» отрезки указывается командой **Hide: Yes — убрать, No — не убирать.** Если «изнанка» рисуется, то точки проверяются на «видимость», и процесс рисования замедляется. Рисунок лучше воспринимается, если «лицевая» сторона и «изнанка» нарисованы разными цветами. Выбор цветов осуществляется с помощью команды **OPTION COLOR PLOT** (**Top**—верх, **Bottom** — низ).

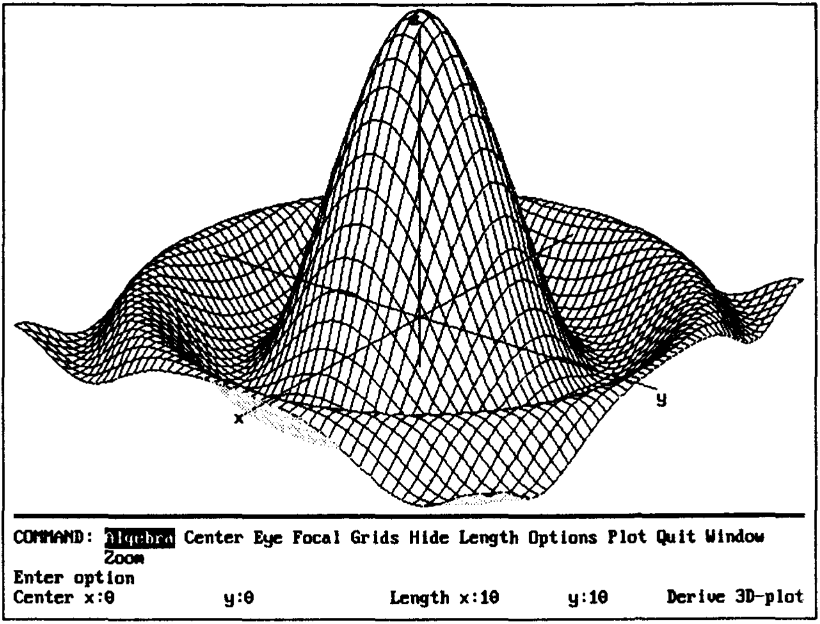



**Рис. 5**

Количество узлов в сетке изменяется командой **Grids**. Выберите число узлов равным 10, 20, 40 и сравните полученные результаты. Не рекомендуется брать число больше 40, иначе может не хватить памяти. В таком случае появляется сообщение **Memory full**.

При помощи команды **Eye** можно перемещать «глаз наблюдателя». Нажмите на клавишу **E** и измените значения $x$, $y$, $z$. Например, придавайте $z$ значения – 2, –1, 1/2, 1, 2 и наблюдайте, как изменяется рисунок.

Команда **Focal** — определение направления осей X и Y. **Center** — изменение координат центра. **Length** — указание длин сторон «ящика», в который «помещен» образ поверхности.

Выберите какую-либо из функций введенного файла и постройте ее график. Используя меню, изменяйте параметры построения.

На рис. 6 построена поверхность $z = y(3x^3 - y^2)$. Grids x:10 y:10

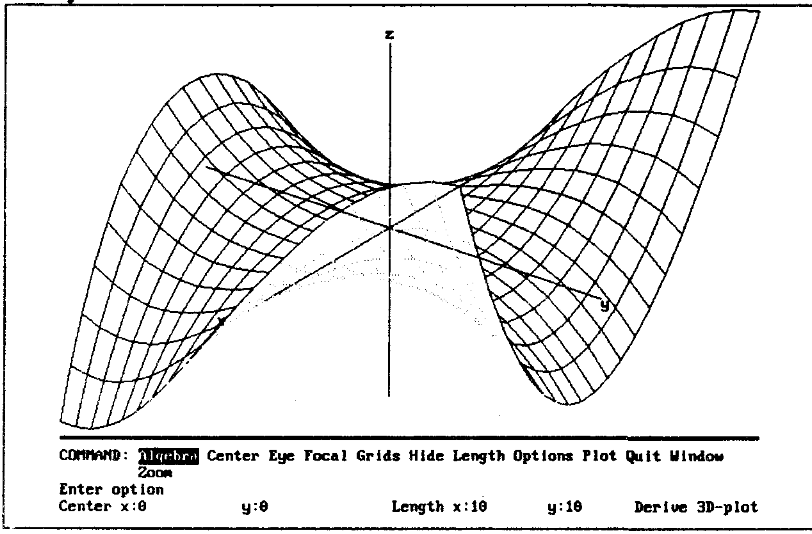



**Рис. 6**

На рис. 7 представлена эта же поверхность при Grids x:50 y:50 Eye x:20 y:15 z:750

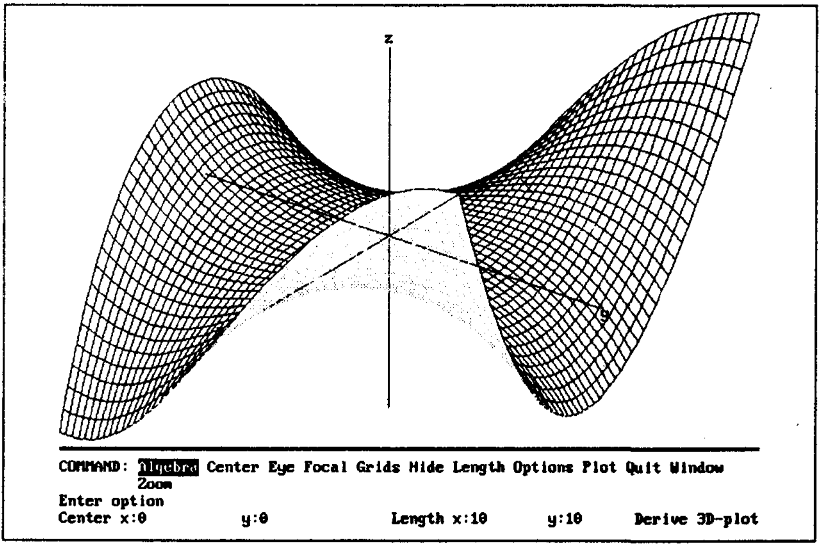



**Рис. 7**

Установим Eye x:40 y:15 z:750 (рис. 8).

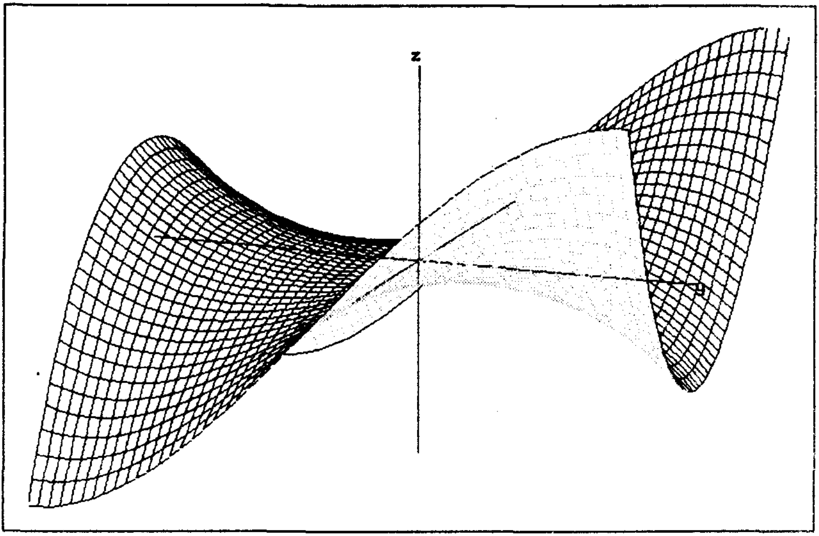



**Рис. 8**

На рис. 9 — Eye x:40 y:40 z:750

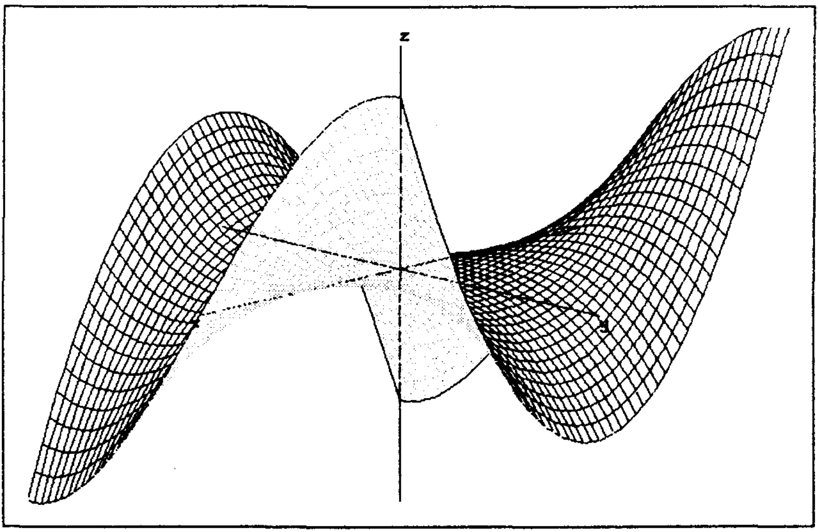



**Рис. 9**

На рис. 10 — Eye x:80 y:80 z:800

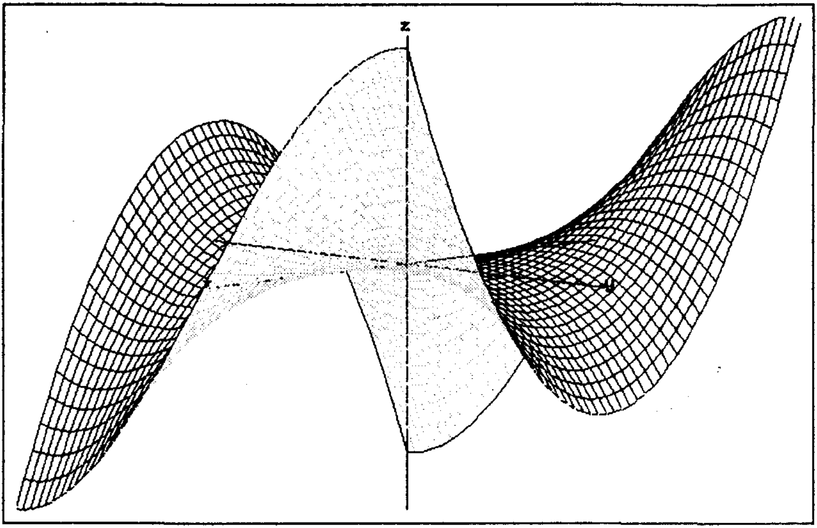



**Рис. 10**

# РАБОТА С ОКНАМИ

В среде Derive есть возможность работать с окнами. Рассмотрим, например, как работать с двумя графическими окнами и одним окном алгебры и подготовить графики, изображенные на рис. 11.

**1.** Переведите систему в режим графики, как обычно (O D G и т.д.).

**2.** Нажмите **W** (Window), **S** (Split), **H** (Horizontal): At line:**20** ↵.

Мы видим два окна, они пронумерованы. Номер 1 выделен подсветкой, это означает, что окно является ***активным***. Обратите внимание на меню: вы видите меню окна 2D-plot. Из окна в окно можно перейти с помощью клавиши **F1**. Нажмите на клавишу **F1** два раза, каждый раз обращайте внимание на меню: после первого раза будет подсвечен но-

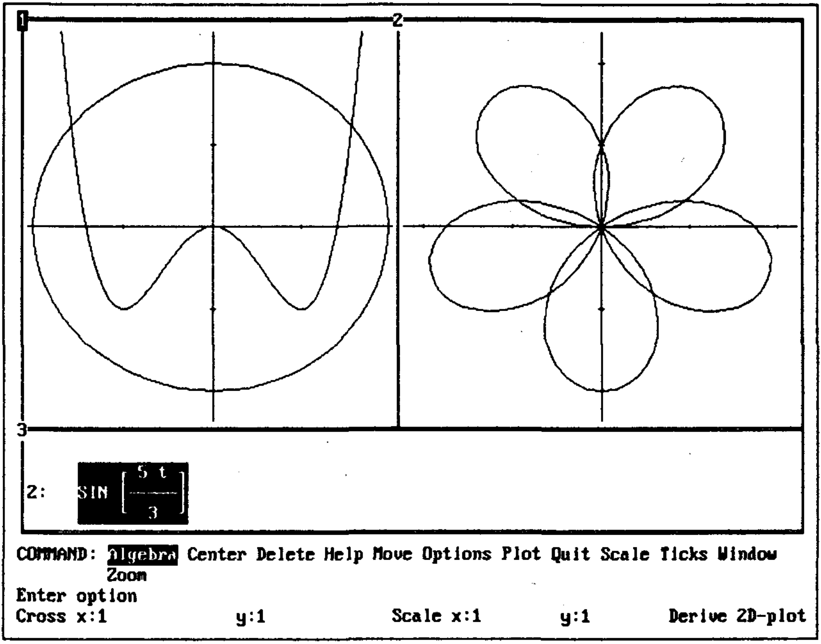



**Рис. 11**

мер 2 и появится меню окна алгебры, после второго нажатия — вновь номер 1 и меню окна 2D-plot.

**3.** Нажмите на клавишу **P**. В первом окне появилась система координат и указатель «+», то есть окно 1 стало окном графики.

**4.** Разделим окно графики на два окна. Для этого нажмите на клавиши **W S V** (Vertical) At line:**39** ↵

Окно1разделилось на два окна, они имеют номера 1 и 2, в каждом окне своя система координат и свой указатель «+». Окно алгебры теперь имеет номер 3. Вновь из окна в окно можно перейти при помощи клавиши F1.

Построим в окне 1 кривую $y = x^4 - 2x^2$, а в окне 2 — кривую $r = \sin\frac{5t}{3}$.

**1.** В окне алгебры введите равенство $y = x^4 - 2x^2$ или выражение $x^4 - 2x^2$. Попасть в окно алгебы быстрее всего можно, нажав на клавишу ↵ (**Enter**).

**2.** Нажмите на клавишу **P**. Обратите внимание на то, какое окно подсвечено. Видим, что подсвечен номер 1, следовательно, окно 1 является активным. **Кривая строится всегда в активном окне** (окне графики).

**3.** Нажмите еще раз на клавишу **P**. Как обычно, подберите нужное увеличение и цвет графика.

**4.** Нажмите на клавишу ↵ (**Enter**). Теперь, как мы и ожидали, подсвечен номер окна алгебры.

**5.** Введите $r = \sin\frac{5t}{3}$ или $\sin\frac{5t}{3}$.

**6.** Нажмите на клавишу **P** — активным стало окно 1.

**7.** Нажмите на клавишу **F1**. Вы видите, что теперь активным является окно 2.

**8.** Кривая $r = \sin\frac{5t}{3}$ задана в полярных координатах, поэтому нажмите **O** (Option) и установите **Polar**.

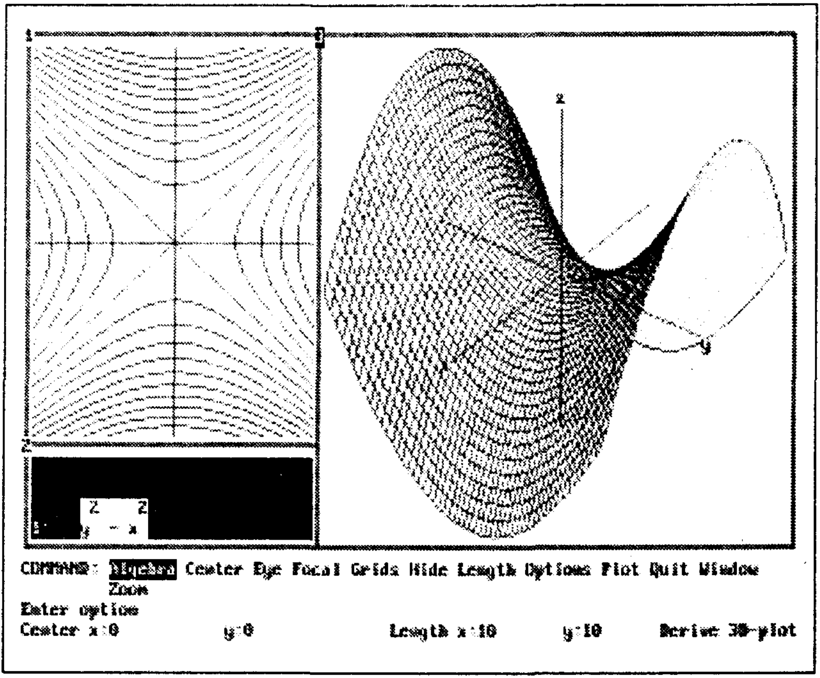



**Рис. 12**

**9.** Постройте кривую как обычно: нажмите на клавишу **P** и укажите пределы изменения переменной $t$.

Постройте теперь в окне 1 окружность $x^2 + y^2 = 4$.

Все обычные действия с кривыми (построение, удаление, изменение цветов, изменение масштаба) можно проделать ***в активном окне*** 2D-plot.

Вы заметили, что сначала мы нажимали на клавишу **P** и затем выбирали номер активного окна. Можно поступить и наоборот: сначала выберите при помощи клавиши **F1** нужное окно, а затем нажмите на клавишу **P**.

Переходить из окна в окно можно и используя команды меню. Смысл команд ясен, смотрите в описании меню команды **Window**. Для перехода в окно можно использовать команду **Next** (следующее), команду **Previous** (предыдущее), команду **Goto** с указанием нужного номера окна.

На рис. 12 вы видите 3 окна. Изображена поверхность $z = y^2 - x^2$ («седло») и ее линии уровня.

В версии 2.6 несколько упрощена работа с окнами. При первой попытке построить график, после нажатия на клавишу **P**, система предлагает выбор: **Beside** (около) **Under** (под) **Overlay** (сверху).

# РАБОТА С ФАЙЛАМИ

## Меню команды TRANSFER

Система Derive выполняет различные действия с файлами. Все команды работы с файлами собраны в меню команды **Transfer**. В разных версиях разное число команд: чем больше номер версии, тем больше возможностей работы с файлами заложено в системе.

Подменю команды **Transfer** в версии 1.57:

**TRANSFER:Merge Clear Demo Load Save Print sTate**

Подменю команды **Transfer** в версии 2.02:

**TRANSFER:Load Save Merge Clear Demo Print**

## Запись выражений в файл

Для записи информации в файл служит команда **TRANSFER SAVE.**

Подменю этой команды в версии 2.02:

**TRANSFER SAVE:Derive Basic Fortran Pascal Options State**

Подменю этой команды в версии 2.6:

**TRANSFER SAVE:Derive Basic C Fortran Pascal Options State**

По этому подменю ясно, что строки, введенные при работе с системой, можно записать в нескольких форматах соответственно указаниям для работы с системой Derive на языках программирования Бейсик, Фортран, Паскаль, Си, а также можно записать текущее состояние системы (**State**) и опции (**Options**).

Файлы типа **mth** пригодны для загрузки в Derive. При этом длинные строки записываются в несколько строк, признаком продолжения строки служит знак ~ (тильда). При работе с системой строка помещается в одну строку окна алгебры. Вы уже знаете, что можно ее просматривать при помощи клавиш со стрелками → и ←.

Можно также записать строки в файлы с расширением **bas**, **for**, **pas**, в версии 2.6 системы — также с расширением **c**. В этом случае записанные строки можно использовать в программах соответственно на языках Бейсик, Фортран, Паскаль, Си. С системой поставляется файл support.pas, в котором содержатся служебные функции, используемые в выражениях формата **pas**.

Записанные файлы можно просмотреть при помощи клавиши **F3**, их можно редактировать в текстовом редакторе.

## Запись текущего состояния системы

Параметры системы хранятся в текстовом файле **derive.ini**. Можно создать различные ini-файлы и загрузить нужный в систему. При запуске программы автоматически загружается файл **derive.ini**.

## Загрузка файлов

Для загрузки файлов служит команда **TRANSFER LOAD.**

Подменю команды TRANSFER LOAD в версии 2.02:

**TRANSFER SAVE:Derive State Utility**

Подменю команды TRANSFER LOAD в версии 2.6:

**TRANSFER SAVE:Derive State daTa Utility**

Таким образом, при работе с версией 2.6 (и выше) можно подключать файлы с расширением data.

Если вы работаете с системой, ввели новые строки, после чего с помощью команды **TRANSFER LOAD** ввели файл, вы потеряете новые строки и сможете работать только со строками, сохраненными в файле. Чтобы потери новых строк не произошло, надо воспользоваться командой **TRANSFER MERGE** .

## Демонстрационные файлы

Вместе с системой поставляется большое число файлов, которые можно использовать как демонстрационные файлы. Для этого при загрузке файла укажите расширение **demo**. При этом Derive считывает выражение из файла, упрощает его и ждет дальнейших действий пользователя. Если нажать на клавишу **Esc**, демонстрация приостанавливается, можно вводить свои строки. Если снова воспользоваться той же командой, демонстрация продолжится с того же места. Эти файлы можно загрузить с расширением **mth** (указав его или не указывая никакого расширения).

## Команда TRANSFER CLEAR

По команде **TRANSFER CLEAR** удаляются все выражения из текущего алгебраического окна, очищаются все определенные пользователем константы, функции и переменные.

## Распечатка строк

Для распечатки строк служит команда **TRANSFER PRINT**. Подменю этой команды в версиях 1.57, 2.02, 2.6 выглядит одинаково:

**TRANSFER PRINT:Printer File Layout Options**

Но есть определенные различия между версиями. В версии 2.6 имеются подменю у команд TRANSFER PRINT PRINTER и TRANSFER PRINT FILE:

**TRANSFER PRINT PRINTER:Expressions Screen Window**
**TRANSFER PRINT PRINTER WINDOW:All Current**

Отличия есть также у команды TRANSFER PRINT OPTIONS.

В версии 1.57

**TRANSFER PRINT OPTIONS:Expression height: < >**
**Characters:Ascii Extended Range:All One**

Требуется указать наибольшую высоту печатаемых символов, каков набор символов — ASCII или расширенный; под расширенным понимается стандартный набор ASCII плюс 128 знаков — основные греческие буквы и математические знаки, а также сколько выражений надо напечатать: **All** — все, **One** — одно.

В версии 2.02:

**TRANSFER PRINT OPTIONS:Range:All**
**Some Set:Standart Extended Expression height:**

то есть те же команды, только вместо **One** стоит **Some** (несколько).

В версии 2.6:

**TRANSFER PRINT OPTIONS:Range:All Some**
**Set:Standart Extended Printer:Plain LaserJet Dotmatrix**

то есть требуется указать тип принтера.

Для установки размеров страницы и отступов служит команда **TRANSFER PRINT LAYOUT.** На экране вы видите начальные значения и приглашение ввести новые значения длины, ширины и отступов распечатываемой страницы.

Созданные в Derive выражения распечатываются в том виде, в каком мы их видим на экране при работе с системой.

## Создание текстового файла

По команде **TRANSFER PRINT FILE** строки, созданные в Derive, можно вывести в текстовый файл, расширение имени этого файла по умолчанию **prt**. Эти файлы невозможно загрузить в Derive. Создайте такой файл, запишите в файл с расширением **prt** строки $\int_2^5 \frac{2x^2+x^3}{x+1}\,\mathrm{d}x$, $\lim\limits_{x\to 2+} \frac{1}{x^2-4}$, выйдите из системы и просмотрите файл при помощи клавиши **F3** или **F4**, или загрузите его в какой-либо текстовый файл.

**TRANSFER PRINT FILE:Expressions Screen Window**
**TRANSFER PRINT FILE WINDOW:All Current**

## Выполнение команд DOS

Команда **OPTIONS Execute** позволяет выполнять команды операционной системы, например, **DIR**, **COPY**. Предположим, вы забыли точное имя нужного вам файла, тогда надо воспользоваться командой DOS **dir**. Далее предполагается, что Derive установлен на диске C в каталоге MATHEM, в подкаталоге DERIVE.

**1.** Нажмите на клавишу **O** (Options).

**2.** Нажмите на клавишу **E** (Execute). Под двойной чертой в строке ввода появится запись

**C:\MATHEM\DERIVE>**

Ниже — указание **Enter DOS command**, то есть «введите команду DOS».

**3.** Если вы собираетесь выполнить только одну команду DOS, то введите сразу эту команду. Например, вы знаете, что вам нужны имена файлов с расширением **pas**, тогда введите

**C:\MATHEM\DERIVE>dir**<пробел>**.pas** ↵

Перед вами появится список всех файлов с этим расширением с указанием объема памяти, которую каждый из этих файлов занимает. Если вы нажмете после этого на любую клавишу, произойдет возврат в систему Derive.

**4.** Если вы должны выполнить несколько команд DOS, после того как появится приглашение ввести команду DOS нажмите на клавишу ввода ↲. Появится сообщение **Type EXIT to reurn to Derive**, то есть «для того, чтобы вернуться в Derive, напечатайте EXIT» и сообщение о версии MS DOS. Введите

**C:\MATHEM\DERIVE>dir**<пробел>**.mth** ↲

На экране появятся имена всех файлов данного подкаталога с расширением **mth**. Затем введите

**C:\MATHEM\DERIVE>dir**<пробел>**plot*.mth** ↲

На экране появится список файлов, имена которых начинаются на plot и которые имеют расширение mth.

Вернитесь в Derive. Для этого напечатайте **exit** ↲.

При выполнении команды **OPTIONS Execute** в памяти компьютера резервируется место для сохранения текущих данных, поэтому не следует запускать программ, требующих большого объема памяти. Если вам необходимо запустить такую программу, запишите данные в файл и выйдите из системы Derive, после этого запустите нужную вам программу.

***Нельзя запускать резидентные программы, не выходя из системы Derive.***

## Комментарии в файле

Если строку начать с кавычек, строка будет неисполняемой. Это дает возможность создавать комментарии. Если файл будет записан с расширением **demo**, то комментарии появятся в строке сообщений. Только следует иметь в виду, что тогда комментарии должны быть записаны латинскими буквами и цифрами.

> ***Замечание.*** Следует иметь в виду, что в некоторых случаях форма ответа зависит от версии системы (например, при вычислении первообразных). Поэтому ваши результаты могут отличаться от приведенных в книге. Но таких случаев немного.

ЧАСТЬ 2

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В СИСТЕМЕ DERIVE

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ

Понятие функции является фундаментальным понятием системы Derive. Для того, чтобы успешно применять эту систему, необходимо научиться определять и использовать функции. Функции, определенные пользователем, называются ***функциями пользователя***.

В первой части книги мы уже рассмотрели, как определить функцию. Рассмотрим несколько примеров, которые иллюстрируют применение функций.

> ***Замечание***. Здесь и в дальнейшем имена функций выделены прописными буквами. Это сделано только для того, чтобы на них читатели обратили внимание, вводить же их можно строчными буквами.

### Дискриминант квадратного уравнения

Введем функцию

$$\boxed{\mathbf{DISCR}\ (a,b,c):=b^2-4ac}$$

> ***Замечание***. Уже отмечалось, что ввести функцию можно строчными буквами, на экране будет запись **DISCR (a, b, c) : = S** = b$^2$ – 4ac. В дальнейшем в большинстве случаев символы, входящие в записи функций, и полученные результаты будут в книге напечатаны курсивом, за исключением названий самих функций. Это сделано для лучшего восприятия записей.

**П р и м е р ы**

**1.** Найти дискриминант уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Р е ш е н и е. **DISCR(1,–5,6)** ↲ S ↲. Результат: 1.

**2.** Введите **DISCR(a)** ↲ S ↲. Результат: $b^2 - 4ac$.

**3.** Введите **DISCR(w)** ↲ S ↲. Результат: $b^2 - 4cw$.

**4.** Введите **DISCR(w,q)** ↲ S ↲. Результат: $q^2 - 4cw$.

**5.** Введите **DISCR(a,3)** ↲ S ↲. Результат: $9 - 4ac$.

Примеры показывают, что ***не обязательно вводить все значения переменных, входящих под знак функции.*** Это очень удобно для пользователя. При вводе функций пользователя можно учесть это обстоятельство и на первые места ставить те переменные, которые чаще изменяются, а на последние – те, что чаще всего не меняются. Это демонстрируют многие функции, приведенные в книге. ***Хотя бы одна переменная после имени функции должна быть указана.***

Отметим, что часто гораздо удобнее воспользоваться функцией, чтобы ввести данные, чем вводить их самому. Такие ситуации часто встречаются. То же замечание можно сделать и насчет корней уравнений, особенно если корни иррациональные: хотя вы легко можете их вычислить устно, проще выполнить L ↲ (если уравнение уже введено или получено системой) и тем самым ввести сразу несколько корней уравнения, чем вводить их самому.

**П р и м е р 6.** Предположим, функция **DISCR** введена в 1 строке. Выполните указанные действия. Все время будем следить за строкой состояния (стр. сост.).

1. Установите курсор поля алгебры на строку #1 и выполните подстановку:

**M S** ↲ a: = q ↲ b ↲ c ↲ (вместо a ввести q).
Результат: #2: **DISCR(q, b, c) : =** $b^2 - 4qc$.
В строке состояния **Sub(1)**
2. #3: **DISCR(q)** ↲ S ↲. Результат: #4: $b^2 - 4qc$.
В строке состояния **Simp(3)**
3. #5: **DISCR(a)** ↲ S ↲. Результат: #6: $b^2 - 4ac$
В строке состояния **Simp(5)**
4. **M S** ↲ a: = 5 ↲ b ↲ c ↲
Результат: #7: **S** = $b^2 - 4\ 5c$
В строке состояния **Sub(6)**

5. #8: **DISCR(5, 1, 1)** ↲ S ↲. Результат: #9: –19.
В строке состояния **Simp(8)**
6. #10: **DISCR(a)** ↲ S ↲. Результат: #11: $b^2 - 4ac$
В строке состояния **Simp(10)**
7. #12: **DISCR(5, b, c)** ↲ S ↲. Результат: #13: $b^2 - 20c$
В строке состояния **Simp(12)**

Проанализируйте рассмотренные примеры.

Свойства функций пользователя позволяют использовать эти функции не только при выполнении расчетных задач, но и при получении теоретических результатов.

Рассмотрим несколько задач, при решении которых используется функция **DISCR**.

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** При каких значениях $m$ неравенство $mx^2 + (2 - m) + 3 - 2m \le 0$ выполняется только для одного действительного значения $x$?

Решение.

1. Пусть $m = 0$. Тогда неравенство имеет вид $2x + 3 \le 0 \Rightarrow x \le -\frac{3}{2}$.

Следовательно, данное неравенство справедливо при всех $x \le \frac{3}{2}$, $m = 0$ не входит в ответ задачи.

2. Пусть $m \ne 0$. Найдем значения $m$, при которых дискриминант данного квадратного трехчлена равен нулю.

**DISCR(*m*,2–*m*,3–2*m*)** ↲ S ↲ L ↲.

Результат: $m = \frac{8}{9} - \frac{2\sqrt{7}}{9}$, $m = \frac{2\sqrt{7}}{9} + \frac{8}{9}$.

Оба найденных значения положительны (проверьте это). Следовательно, ветви параболы — графика данного квадратного трехчлена — направлены вверх, поэтому трехчлен не принимает отрицательных значений, он принимает значение нуль в единственной точке $x = \frac{m-2}{2m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{m}$.

Ответ: $m = \frac{8}{9} - \frac{2\sqrt{7}}{9}$, $m = \frac{2\sqrt{7}}{9} + \frac{8}{9}$.

Найдите соответствующие решения неравенства двумя способами. Постройте параболы при найденных значениях $m$ и установите указатель «+» в вершину параболы. Убедитесь зрительно в правильности полученных результатов.

**Задача 2.** Определите все значения параметра $a$, при котором уравнение $2ax^2 - 4(a+1)x + 4a + 1 = 0$ имеет два корня.

Решение.

1. Пусть $a = 0$. Тогда данное уравнение имеет одно решение. Следовательно, $a = 0$ не входит в ответ задачи.

2. Пусть $a \neq 0$. Найдем дискриминант $D$ данного уравнения.

**DISCR (2*a*, –4(*a* + 1), 4*a* + 1)** ↵ S ↵.
Результат: $-8(2a^2 - 3a - 2)$.

Уравнение имеет два решения, если $D > 0$.

$-8(2a^2 - 3a - 2)>0$ ↵ L ↵. Результат: $(a-2)\left(a+\frac{1}{2}\right)<0$, то есть $a\in\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

Учитывая, что $a \neq 0$, получаем $a\in\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup(0;2)$.

Ответ: $a\in\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup(0;2)$.

Введите данное уравнение, подставьте в него какое-либо значение $a$ из полученного ответа, например, $a = 1$, $a = -1/4$, $a = 1/2$ и решите полученные уравнения. Убедитесь в том, что эти уравнения имеют по два корня.

**Задача 3.** При каких значениях параметра $a$ множество значений функции $y = 8\cdot 2^{\frac{x^2-ax-2}{x^2-x+1}} - 1$ принадлежит отрезку $[0;127]$ при всех значениях $x$?

Решение.

Из условия следует, что $2^{-3} \leq 2^{\frac{x^2-ax-2}{x^2-x+1}} \leq 2^4$.

Отсюда $-3 \leq \dfrac{x^2-ax-2}{x^2-x+1} \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - x(a+4) + 6 \geq 0 \\ 4x^2 + x(a-3) + 1 \geq 0 \end{cases}$

Ищем значения $a$, при которых оба неравенства системы истинны при любых значениях $x$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы дискриминанты обоих квадратных трехчленов были неположительны.

1. **DISCR(3,–($a$ + 4), 6)** ↵ L ↵.

Результат: $(a-6\sqrt{2}+4)(a+6\sqrt{2}+4)\le 0$.

Следовательно, $a\in\left[-6\sqrt{2}-4;6\sqrt{2}-4\right]$.

2. **DISCR(4, $a$–3,1)≤0** ↵ L ↵.

Результат: $(a-7)(a+1)\le 0$.

Следовательно, $a\in[-1;7]$.

3. Найдем пересечение полученных отрезков.

Ответ: $a\in\left[-1;6\sqrt{2}-4\right]$.

**Задача 4.** Найти наибольшее из значений параметра $a$, для которых существуют пары чисел $(x, y)$, удовлетворяющие равенству $x^2+2y^2+a^2+xy-ax+ay=3$.

Решение.

На выражение $x^2+2y^2+a^2+xy-ax+ay-3$ будем смотреть как на квадратный трехчлен относительно переменной $x$. Поэтому перепишем его в виде $x^2+x(y-a)+(2y^2+a^2+ay-3)$. Дискриминант этого квадратного трехчлена должен быть неотрицательным.

**DISCR** $(1, y-a, 2y^2+a^2+ay-3)\ge 0$ ↵ S ↵.

Результат: $-7y^2-6ay-3a^2+12\le 0$.

Найдем $a$, при которых полученное неравенство имеет решения.

**DISCR** $(-7,-6a,-3a^2+12)\ge 0$ ↵ S ↵ L ↵.

Результат: $|a|\le\sqrt{7}$.

Следовательно, при $|a|\le\sqrt{7}$ данное уравнение имеет решения. Наибольшее число из найденного отрезка есть $\sqrt{7}$.

Ответ: $a=\sqrt{7}$.

**Задача 5.** При каких значениях параметра $a$ существует единственная пара чисел $(x, y)$, удовлетворяющая равенству $ax^2+(3a+2)+4axy-2x+(4-6a)y+2=0$?

Р е ш е н и е.

Перепишем данное уравнение в виде:

$ax^2 + x\,(4ay - 2a) + ((3a + 2)y^2 + (4 - 6a)y + 2) = 0.$

Введите левую часть этого равенства.

1. Пусть $a = 0$. Подставьте это значение в введенное равенство.

M S $a$: = 0 ↵. Результат: $2y^2 + 4y + 2$ L ↵. Результат: $y = -1$.

Итак, пара $(x; -1)$ является решением данного уравнения при любом $x$. Следовательно, $a = 0$ не входит в ответ задачи.

2. Будем смотреть на данное уравнение как на квадратное относительно переменной $x$, найдем его дискриминант $D$.

**DISCR** $(a, 4ay - 2a, (3a + 2)y^2 - (4 - 6a)\,y + 2)$ ↵ S ↵.

Результат: $4a\,(y^2(y - 2) + 2(a - 2) + a - 2)$ F ↵.

Результат: $4a\,(a - 2)\,(y + 1)^2$.

Если $a(a - 2) \geq 0$, то при любом $y$ дискриминант $D \geq 0$, следовательно, уравнение имеет бесконечно много решений. Если $a(a - 2) < 0$, то при любом $y \neq -1$ $D < 0$. Следовательно, уравнение не имеет решений. Если $a(a - 2) < 0$ и $y = -1$, то уравнение имеет единственное решение.

Ответ: при $a \in (0; 2)$.

**Задача 6.** При каких значениях $a$ и $b$ парабола $y = x^2 + ax + b$ касается прямых $y = 5x + 1$ и $y = -x - 2$.

Р е ш е н и е.

Воспользуемся тем, что касательная к параболе имеет с параболой единственную общую точку. Отсюда следует, что каждая из систем

$\begin{cases} y = x^2 + ax + b \\ y = 5x + 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} y = x^2 + ax + b \\ y = -x - 2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

1. Введите выражение $x^2 + ax + b - y$.

2. Подставьте в него $y$: = $5x + 1$: M S $y = 5x + 1$ ↵ S ↵.

3. Получили квадратный трехчлен $x^2 + x\,(a - 5) + b - 1$. Он должен иметь единственное решение, следовательно, его дискриминант $D$ должен равняться нулю.

**DISCR**$(1, a - 5, b - 1)$ ↵ S ↵. Результат: $a^2 - 10a - 4b + 29$.

4. Из равенства $D = 0$ выразим $b$.

L b ↵ Результат: $b = \dfrac{a^2 - 10a + 29}{4}$.

Аналогично поступим во втором случае.

5. В выражение $x^2 + ax + b - y$ подставим $y = -x - 2$. M S $y$: = $-x - 2$↵ S ↵

6. Найдем дискриминант полученного квадратного трехчлена $x^2 + x(a + 1) + b + 2$.

**DISCR**(1, $a$ + 1, $b$ +2)↵ S ↵. Результат: $a^2 + 2a - 4b - 7$

7. L b ↵. Результат: $b = \dfrac{a^2 + 2a - 7}{4}$.

8. Сравнивая полученные результаты, получаем уравнение

$$\frac{a^2 - 10a + 29}{4} = \frac{a^2 + 2a - 7}{4}.$$

9. Введите это уравнение (используя **F3**) и решите его: L ↵. Результат: $a = 3$.

10. Найдем соответствующее значение $b$, сделав замену M S ↵$a$: = 3 ↵ в любом из найденных равенств, S ↵. Результат: $b = 2$.

Ответ: при $a = 3$, $b = 2$.

Постройте параболу $y = x^2 + 3x + 2$ и прямые $y = 5x + 1$ и $y = -x - 2$.

Зрительно убедитесь в том, что эти прямые — касательные. Найдите аналитически координаты точек касания, после чего установите указатель «+» (используя **Move**) в одну из найденных точек. Убедитесь в правильности результатов.

## Площадь треугольника

Нам известно, что площадь треугольника можно найти по формуле $S = \frac{1}{2}ab\operatorname{Sin}\alpha$, где $a$ и $b$ — длины сторон треугольника, $\alpha$ — угол между ними.

Введем функцию

$$\boxed{\mathbf{S\_TR}(a,b,u) := S = ab\sin(u)/2}$$

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Известны длины сторон треугольника $a = 2$, $b = 3$ и угол между ними а = π/2. Найти площадь треугольника $S$.

Решение. **S_TR**(2,3,π/4) ↲ S ↲. Результат: $S = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

**Задача 2.** Катеты прямоугольного треугольника равны $a$ и $b$. Найти его площадь.

Решение. **S_TR**($a$,$b$,π/2) ↲ S ↲. Результат: $S = \frac{ab}{2}$.

**Формула Герона.** В определении функции можно использовать другие функции, определенные пользователем. В качестве примера рассмотрим формулу Герона.

Известно, что площадь треугольника можно найти по формуле

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = (a + b + c) / 2$.

Введем функции

$$\boxed{\mathbf{POL}\,(a,b,c) := (a+b+c)/2}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{S\_TRG}\,(a,b,c) := \\ \hline \sqrt{(\mathbf{POL}(a,b,c)(\mathbf{POL}(a,b,c)-a)(\mathbf{POL}(a,b,c)-b)(\mathbf{POL}(a,b,c)-c))}\end{array}}$$

Для ввода √ используйте **Alt+q**.

*Замечания*. 1. Как вы знаете, знак квадратного корня отражается на экране в сокращенной форме √. Выражение, стоящее под ним, при вводе должно быть заключено в круглые скобки.

2. Функция **S_TRG** записана в том виде, в каком она вводится, на экране она также имеет этот вид. В дальнейшем функции будут записаны в привычном для нас виде, то есть все выражение будет записано под знаком корня, внешних скобок не будет. При вводе подобных функций не забывайте про внешние скобки. После ввода внимательно смотрите на экран: все выражение, стоящее под корнем, заключено в скобки.

3. Если выражение функции длинное, в книге оно будет записано в нескольких строках. Вводится оно, конечно, одной строкой. Если вы будете просматривать файлы.mth (созданные в системе Derive), то увидите, что длинные выражения функций располагаются в нескольких строках, каждое неоконченное выражение отмечено знаком ~ , этот знак показывает, что следующая строка является продолжением данной. В книге этот знак почти не используется, так как функции помещены в рамки.

Файл можно посмотреть при помощи клавиш **F3, F4.** Можно загружать его в текстовый редактор.

**Пример**. Даны длины сторон треугольника $a = 3, b = 4, c = 5$. Найти его площадь.

Решение. **S_TRG**(3,4,5) ↵ S ↵. Результат: $S = 6$.

Функцию **POL** можно использовать как самостоятельную функцию.

Возьмите недопустимую тройку чисел и найдите соответствующие ей значения функций **POL** и **S_TRG**.

Определите теперь функцию для нахождения площади треугольника по формуле Герона без использования вспомогательной функции **POL**.

Вы видите, что выражение полученной функции более громоздко. Поэтому во многих случаях ради сокращения выражения функции и введения более ясной структуры её построения мы будем использовать вложенные функции — подобно тому, как это сделано в рассмотренном примере.

***Замечание***. Введите **S_TRG**($a$) ↵ S ↵.

Выделите подкоренное выражение **FR** ↵.

Результат: $\dfrac{\sqrt{\left(-(a+b-c)(a+b+c)(a+c-b)(a-(b+c))\right)}}{4}$.

Таким образом, мы получили преобразованное выражение, Derive заменил функцию **POL**($a$, $b$, $c$) ее выражением. Поэтому если вложений несколько, можно в результате таких действий получить очень громоздкое выражение. Имейте это в виду.

**Общие замечания.** Так как функциям можно давать свои, произвольные имена, будем выбирать имя так, чтобы по нему легко можно было понять смысл данной функции, ее предназначение. Имя функции может содержать буквы латинского алфавита, цифры, знак подчеркивания _. В пакет входит большое число файлов, содержащих функции, которые решают определенный круг задач. Имена функций выбраны так, чтобы человек, знающий английский язык, легко мог понять, какую задачу решает данная функция. Описания некоторых из них приведены в справочном разделе. В данной книге автором введено большое число функций, которые получили имена, понятные тем, кто говорит на русском языке. Вы можете изменять имена этих функций по своему усмотрению, а также пользоваться библиотекой функций, входящей в систему. Если вы собираетесь сохранить введенную функцию на диске, не давайте ей слишком простое односложное имя вроде *a* или *bb*, иначе вскоре вы их можете случайно потерять. Лучше дать составное название, например, URAV_PR. Не бойтесь длинных названий, так как их можно скопировать при помощи клавиши **F3**, после чего и откорректировать данные.

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

**Задача 1**. Ввести функцию для получения уравнения прямой, проходящей через точки $A(a;\ b)$ и $B(c;\ d)$.

Решение.

Известно, что уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$, имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\Rightarrow y=\frac{x\left(b-d\right)+ad-bc}{a-c}=\frac{b-d}{a-c}x+\frac{ad-bc}{a-c}.$$

Введем функцию

$$\boxed{\mathbf{LINE}(a,b,c,d):=y=\frac{b-d}{a-c}x+\frac{ad-bc}{a-c}}$$

**Пример.** Составить уравнение прямой, проходящей через точки (2; –4) и (5; 7).

Решение.

**LINE**(2, –4, 5, 7) ↵ S ↵. Результат: $y=\frac{11x}{3}-\frac{34}{3}$.

*Замечание* 1. Везде в параграфах, посвященных аналитической геометрии, при задании уравнений линий будем обозначать аргумент через $x$, а функцию — через $y$. Если вас это не устраивает, во всех вводимых функциях последними укажите $x$ и $y$. В данном случае **LINE**$(a, b, c, d, x, y)$. Тогда:

**LINE**(2, –4, 5, 7) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{11x}{3} - \frac{34}{3}$.

**LINE**(2, –4, 5, 7, $x$, $y$) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{11x}{3} - \frac{34}{3}$.

**LINE**(2, –4, 5, 7, $t$, $z$) ↵ S ↵. Результат: $z = \frac{11t}{3} - \frac{34}{3}$.

*Замечание* 2. Можно ввести функцию **LINE** и так:

$$\mathbf{LINE1}(a,b,c,d) := y = \frac{x(b-d) + ad - bc}{a-c}.$$

**Пример 1.** Решим рассмотренный пример, используя функцию LINE1.

**LINE1**(2, –4, 5, 7) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{11x - 34}{3}$.

Часто при решении задач надо определить угловой коэффициент прямой, поэтому функция **LINE** более удобна.

**Пример 2.** Рассмотрим еще пример, который демонстрирует преимущество функции **LINE**.

Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(\sqrt{3};2)$ и $B(\sqrt{5};-1)$.

**LINE1** $(\sqrt{3},2,\sqrt{5};-1)$ ↵ S ↵.

Результат: $y = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right](3x - \sqrt{3} - 2\sqrt{5})$ X ↵.

Результат: $y = -8.71220 \cdot 10^{-4}(6832x - 14129)$.

**LINE** $(\sqrt{3},2,\sqrt{5},-1)$ ↵S ↵$X$↵. Результат: $y = 12.3094 - 5.95217x$.

Введите функцию для нахождения углового коэффициента прямой, назовите ее, например, **UGKF_PR** и составьте и решите несколько примеров на ее использование.

**Задача 2.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(5; -2)$ и точку пересечения прямых $3x - 2y + 4 = 0$ и $5x + 3y + 2 = 0$.

Р е ш е н и е.

1. Найдем точку пересечения данных прямых.
[3x – 2y + 4 = 0, 5x + 3y + 2 = 0] ↲ L ↲.

Результат: $\left[x = -\dfrac{16}{19}, y = \dfrac{14}{19}\right]$.

2. Найдем уравнение искомой прямой:

**LINE**(–16/19,14/19,5,–2) ↲ S ↲.

Результат: $y = -\dfrac{52x}{111} + \dfrac{38}{111}$.

Ответ: $y = \dfrac{38}{111} - \dfrac{52x}{111}$.

**Задача 3.** Получить уравнение прямой с угловым коэффициентом $k$, проходящей через точку $(d; h)$.

Решение.

Запишем общее уравнение прямой: $y = kx + b$. Прямая должна проходить через точку $(d; h)$, следовательно, $h = kd + b \Rightarrow b = h - kd$, поэтому искомое уравнение имеет вид $y = kx + h - kd$.

Введем функцию **LINE2**, определяющую это уравнение:

$$\boxed{\mathbf{LINE2}\ (k, d, h){:} = y = kx + h - kd}$$

**П р и м е р 1.** Написать уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент 1 и проходящей через точку (3; 5).

Р е ш е н и е.

**LINE2**(1, 3, 5) ↲ S ↲. Результат: $y = x + 2$.

**П р и м е р 2.** Сформулируйте условия задач, решения которых приводятся.

**LINE2**(–1, 3, 5) ↲ S ↲. Результат: $y = 8 - x$.

**LINE2**(1/2, 3, 4) ↲ S ↲. Результат: $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{2}$.

**Задача 4.** Найти уравнение прямой, параллельной прямой $y = 6x - 11$ и проходящей через точку (5; 3).

Решение.

Воспользуемся условием параллельности прямых. Угловой коэффициент искомой прямой должен быть равен 6. Следовательно, надо найти уравнение прямой, угловой коэффициент которой равен 6, проходящей через точку (5; 3). Эту задачу решает функция **LINE2**.

**LINE2**(6,5,3) ↵ S ↵. Результат: $y = 6x - 27$.

**Задача 5.** Найти координаты середины отрезка $AB$, если известны координаты точек $A$ и $B$: $A(a; b)$, $B(c; d)$.

Решение.

Воспользуемся тем, что если на числовой оси заданы точки с координатами $a$ и $b$, то середина отрезка имеет координату $(a + b) / 2$.

Введем функции.

$$\boxed{\mathbf{X\_C}(a,b) := \frac{a+b}{2}}$$

$$\boxed{\mathbf{C\_OTR}(a,b,c,d) := [\mathbf{X\_C}(a,c), \mathbf{X\_C}(b,d)]}$$

Функция **C_OTR** (центр отрезка) решает поставленную задачу, функция **X_C** (<координата> $x$ отрезка) — вспомогательная. Можно обойтись без вспомогательной функции **X_C**, так как среднее арифметическое находит встроенная функция **AVERAGE**. Тогда

$$\boxed{\mathbf{C\_OTR}(a,b,c,d) := [\mathbf{AVERAGE}(a,c), \mathbf{AVERAGE}(b,d)]}$$

**Задача 6.** Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(d; h)$ параллельно прямой $ax + by + c = 0$ (1).

Решение.

Воспользуемся условием параллельности прямых: их угловые коэффициенты должны совпадать. Следовательно, уравнение искомой прямой можно записать в виде $ax + by + q = 0$ (2).

1. Подставим в уравнение (2) $x = d$, $y = h$ ( M S ) и из полученного уравнения выразим $q$ (L q).

Результат: $q = -(ad + bh)$.

2. Подставим найденное выражение в (2) (M S), получим искомое уравнение. Решим его относительно переменной $y$, получим $y = -\frac{a}{b}x + \frac{ad + bh}{b}$.

Введем функцию

$$\boxed{\mathbf{LN\_PAR}(d, h, a, b) := y = -\frac{a}{b}x + \frac{ad + bh}{b}}$$

Заметьте, что для решения этой задачи значение $c$ можно не знать.

**П р и м е р .** Найти уравнение прямой, проходящей через точку (2; –1) параллельно прямой $2x - 3y + 5 = 0$.

**LN_PAR**(2, –1, 2, –3) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{2x}{3} - \frac{7}{3}$.

Иначе это уравнение можно записать так: $2x - 3y + 7 = 0$.

**Задача 7.** Точки $A(-4; 5)$, $B(2; -3)$, $C(4; 6)$ являются серединами сторон треугольника. Построить этот треугольник.

Решение.

1. Уравнение прямой $AB$:

**LINE**(–4, 5, 2, –3) ↲ S ↲. Результат: $y = -\frac{4x}{3} - \frac{1}{3}$.

2. Проведем прямую, параллельную прямой $AB$ и проходящую через точку $C$.

**LN_PAR**(4, 6, 4, 3) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{34}{3} - \frac{4x}{3}$.

Получили уравнение одной из сторон треугольника. Аналогично найдем уравнения двух других сторон.

3. **LINE**(2, –3, 4, 6) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{9x}{2} - 12$.

4. **LN_PAR**(–4, 5, 9, –2) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{9x}{2} + 23$.

5. **LINE**(–4, 5, 4, 6) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{x}{8} + \frac{11}{2}$.

6. **LN_PAR**(2, –3, 1, –8) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{x}{8} - \frac{13}{4}$.

Для построения треугольника найдем вершины треугольника, то есть точки пересечения найденных прямых.

$\left[y=\dfrac{34}{3}-\dfrac{4x}{3},y=\dfrac{9x}{2}+23\right]$ ↵ L ↵. Результат: (–2; 14).

$\left[y=\dfrac{34}{3}-\dfrac{4x}{3},y=\dfrac{x}{8}-\dfrac{13}{4}\right]$ ↵ L ↵. Результат: (10; –2).

$\left[y=\dfrac{x}{8}-\dfrac{13}{4},y=\dfrac{9x}{2}+23\right]$ ↵ L ↵. Результат: (–6; –4).

Построим треугольник. Построим отрезок $\left[x,\dfrac{34}{3}-\dfrac{4x}{3}\right]$ при $x\in[-2;10]$, отрезок $\left[x,\dfrac{x}{8}+\dfrac{11}{2}\right]$ при $x\in[-6;10]$, отрезок $\left[x,\dfrac{9x}{2}+23\right]$ при $x\in[-2;-6]$. Установите указатель «+» в какую-либо из вершин треугольника и проверьте результат.

В дальнейшем под заданием «построить фигуру» будем понимать, что должны быть построены все стороны этой фигуры, а не просто прямые, на которых лежат эти стороны.

**Задача 8.** Составить уравнение прямой, перпендикулярной прямой $ax + by + c = 0$, $a \neq 0$ (1) и проходящей через точку $M(d; h)$.

Решение.

1. Воспользуемся условием перпендикулярности прямых: произведение их угловых коэффициентов должно равняться –1. Угловой коэффициент данной прямой равен $-a/b$, поэтому угловой коэффициент искомой прямой равен $b/a$, следовательно, искомое уравнение прямой можно записать в виде $y=\dfrac{b}{a}x+q$ (2).

2. Прямая (2) проходит через точку $M(d; h)$. Подставим в (2) $x = d$, $y = h$ (M S) и из полученного равенства выразим $q$ (L q ↵). Результат: $q = h - bd/a$.

3. Подставив в (2) вместо $q$ полученное выражение, получим искомое уравнение.

Введем функцию

$$\boxed{\mathbf{LN\_PER}(d,h,a,b):=y=\frac{b}{a}x+h-\frac{bd}{a}}$$

**П р и м е р .** Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;-5)$ перпендикулярно к прямой $3x+4y-5=0$.

**LN_PER**(1, –5, 3, 4) ↲ S ↲. Результат: $y=\frac{4x}{3}-\frac{19}{3}$.

Сделайте рисунок.

**Задача 9.** Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(d;h)$ и перпендикулярной прямой с угловым коэффициентом $k$.

Р е ш е н и е.

Угловой коэффициент искомой прямой равен $-\frac{1}{k}$, поэтому уравнение этой прямой $y=-\frac{1}{k}x+b$. Так как эта прямая проходит через точку $M(d;h)$, то $h=-\frac{1}{k}d+b \Rightarrow b=h+\frac{d}{k}$. Следовательно, уравнение искомой прямой имеет вид $y=-\frac{x}{k}+h+\frac{d}{k}$.

Введем функцию

$$\boxed{\mathbf{LN\_PERV2}(k,d,h):=y=-\frac{x}{k}+h+\frac{d}{k}}$$

**П р и м е р .** Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;-5)$ и перпендикулярной прямой с угловым коэффициентом, равным –3/4.

**LN_PERV2**$\left(-\frac{3}{4},1,-5\right)$ ↲ S ↲. Результат: $y=\frac{4x}{3}-\frac{19}{3}$.

**Задача 10.** Составить уравнение прямой, перпендикулярной к прямой $ax + by + c = 0$ и проходящей через точку $M$ прямой с абсциссой $d$.

Решение.

Обозначим ординату точки $M$ через $h$: $M(d; h)$. Так как точка $M$ принадлежит данной прямой, то $ad + bh + c = 0$. Выразим из этого равенства $h$ и воспользуемся результатами предыдущей задачи.

Введем функцию

$$\boxed{\mathbf{LN2\_PER}(d,a,b,c) := y = \frac{b}{a}x - \frac{ad+c}{b} - \frac{bd}{a}}$$

**Пример.** Найти уравнение прямой, перпендикулярной прямой $2x - 3y + 1 = 0$ и проходящей через точку данной прямой с абсциссой 3.

Решение.

**LN2_PER**(3, 2, –3, 1) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{41}{6} - \frac{3x}{2}$.

**Задача 11.** Найти проекцию точки $C(-4; 3)$ на прямую $AB$, $A(-1; 5)$, $B(5; -3)$.

Решение.

1. Найдем уравнение прямой $AB$:

**LINE**(–1, 5, 5, –3) ↲ S ↲. Результат: $y = -\frac{4x}{3} + \frac{11}{3}$.

2. Уравнение прямой, проходящей через точку $C$ и перпендикулярной найденной прямой $AB$:

**LN_PER**(–4, 3, 4, 3) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{3x}{4} + 6$.

3. Искомая точка — точка пересечения найденных прямых:

$\left[y = -\frac{4x}{3} + \frac{11}{3}, y = \frac{3x}{4} + 6\right]$ ↲ L ↲. Результат: $\left[-\frac{28}{25}, \frac{129}{25}\right]$.

Ответ: $\left(-\frac{28}{25}; \frac{129}{25}\right)$.

Постройте рисунок.

**Задача 12.** Решим предыдущую задачу в общем виде: найти проекцию точки $M(d; h)$ на прямую $ax + by + c = 0$.

Решение.

**LN_PER**$(d,h,a,b)$ ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{b}{a}x + h - \frac{bd}{a}$.

$\left[ax + by + c = 0, y = \frac{b}{a}x + h - \frac{bd}{a}\right]$ ↲ L ↲.

Результат: $\left[x = \frac{b^2 d - a\,(bh + c)}{a^2 + b^2}, y = \frac{a^2 h - abd - bc}{a^2 + b^2}\right]$.

Введем функцию

$$\boxed{\mathbf{T\_PER}(d,h,a,b,c) := \left[\frac{b^2 d - a(bh + c)}{a^2 + b^2}, \frac{a^2 h - abd - bc}{a^2 + b^2}\right]}$$

**Пример 1.** Найти проекцию точки $M(-2; 7)$ на прямую $x + 2y - 4 = 0$.

Решение.

**T_PER**$(-2, 7, 1, 2, -4)$ ↲ S ↲. Результат: $\left[-\frac{18}{5}, \frac{19}{5}\right]$.

**Пример 2.** Решите предыдущую задачу, используя функцию **T_PER**.

*Замечание*. Можно было бы функцию **T_PER** определить так:

$$\mathbf{T\_PER}(d,h,a,b,c) := \left[x = \frac{b^2 d - a(bh + c)}{a^2 + b^2}, y = \frac{a^2 h - abd - bc}{a^2 + b^2}\right].$$

Тогда было бы

**T_PER**$(-2, 7, 1, 2, -4)$ ↲ S ↲. Результат: $\left[x = -\frac{18}{5}, y = \frac{19}{5}\right]$.

Если вы собираетесь строить полученную точку, то удобнее сразу получить ее в виде $\left[-\frac{18}{5}, \frac{19}{5}\right]$.

**Задача 13.** Даны вершины треугольника $A(-5; 6)$, $B(2; 4)$, $C(-1, -3)$. Построить треугольник и его высоты.

Решение.

1. Уравнение прямой $AB$:

**LINE**(–5, 6, 2, 4) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{32}{7} - \frac{2x}{7}$.

2. Найдем уравнение высоты треугольника к стороне $AB$ — уравнение прямой $MC$.

**LN_PER**$\left(-1,-3,-\frac{2}{7},-1,\right)$ ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{7x}{2} + \frac{1}{2}$.

3. Точка пересечения прямых $AB$ и $MC$ (для построения чертежа):

$\left[y = \frac{32}{7} - \frac{2x}{7}, y = \frac{7x}{2} + \frac{1}{2}\right]$ ↲ L ↲.

Результат: $\left[x = \frac{57}{53}, y = \frac{226}{53}\right]$.

(Не забудьте скопировать уравнения прямых при помощи клавиши **F3**.)

Вообще говоря, надо найти только абсциссу точки пересечения этих прямых, поэтому можно составить уравнение $\frac{32}{7} - \frac{2x}{7} = \frac{7x}{2} + \frac{1}{2}$ и решить его.

Продолжите решение задачи самостоятельно, постройте рисунок.

**Задача 14.** Известны уравнения высот треугольника $2x - 3y + 1 = 0$ и $x + y = 0$ и координаты одной из его вершин $C(1; 2)$. Построить треугольник и его высоты.

Решение.

1. Найдем уравнения двух сторон треугольника, проходящих через точку $C$, учитывая, что они перпендикулярны данным высотам.

**LN_PER**(1, 2, 2, –3) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{7}{2} - \frac{3x}{2}$.

**LN_PER**(1, 2, 1, 1) ↲ S ↲. Результат: $y = x + 1$.

Третья высота проходит через вершину $C$ и точку пересечения данных высот.

2. Точка пересечения данных высот треугольника:

$[2x - 3y + 1 = 0, x + y = 0]$ ↵ L ↵. Результат: $\left[x = -\frac{1}{5}, y = \frac{1}{5}\right]$.

3. Уравнение третьей высоты:

**LINE**(–1/5, 1/5, 1, 2) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{3x}{2} + \frac{1}{2}$.

4. Найдем точку пересечения стороны треугольника с уравнением $y = x + 1$ и высоты с уравнением $2x - 3y + 1 = 0$.

$[y = x + 1, 2x - 3y + 1 = 0]$ ↵ L ↵. Результат: $A(-2; -1)$.

5. Найдем точку пересечения стороны треугольника с уравнением $y = \frac{7}{2} - \frac{3x}{2}$ и высоты с уравнением $y = -x$. Результат: $B(7; -7)$.

6. Найдем уравнение третьей стороны треугольника — уравнение прямой $AB$.

**LINE**(–2, –1, 7, –7) ↵ S ↵. Результат: $y = -\frac{2x}{3} - \frac{7}{3}$.

Сделайте чертеж (**Scale 5**).

**Задача 15.** Через точку $M(10; 8)$ провести прямую так, чтобы середина отрезка ее между параллельными прямыми $3x - 7y + 20 = 0$ (1) и $3x - 7y - 5 = 0$ (2) лежала на прямой $4y - x - 8 = 0$ (3).

Р е ш е н и е.

1. Найдем точку пересечения прямых (3) и (1) – точку $A$.

Результат: $A\left(-\frac{24}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

2. Найдем точку пересечения прямых (3) и (2) — точку $B$.

Результат: $B\left(\frac{76}{5}, \frac{29}{5}\right)$.

3. Найдем середину отрезка $AB$:

**C_OTR**(–24/5, 4/5, 76/5, 29/5) ↵ S ↵. Результат: $\left[\frac{26}{5}, \frac{33}{10}\right]$.

4. Соединим найденную точку с точкой $M$:

**LINE**(10, 8, 26/5, 33/10) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{47x}{48} - \frac{43}{24}$.

Сделайте рисунок. Ответ: $y = \frac{47x}{48} - \frac{43}{24}$.

**Задача 16**. Найти расстояние между двумя точками $A(a, b)$ и $B(c, d)$.

Решение.

Из теоремы Пифагора следует, что расстояние $r$ между двумя точками определяется по формуле $r = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$.

Введем функцию

$$\textbf{RASST}(a,b,c,d) := \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

**Пример.** Найдите расстояние между точками $A(2; -4)$ и $B(5; 7)$.

**RASST**(2, –4, 5, 7) ↲ S ↲. Результат: $\sqrt{130}$.

**Задача 17.** На прямой $2x + 4y - 7 = 0$ найти точку, равноудаленную от точек $A(3; -7)$ и $B(-2; -4)$.

Решение.

1. Найдем уравнение прямой $AB$.

**LINE**(3, –7, –2, –4) ↲ S ↲. Результат: $y = -\frac{3x}{5} - \frac{26}{5}$.

2. Середина отрезка $AB$ — точка $C$:

**C_OTR**(3, –7, –2, –4) ↲ S ↲. Результат: $\left[\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}\right]$.

3. Найдем уравнение перпендикуляра к прямой $AB$, проведенного через середину отрезка $AB$:

**LN_PER**(1/2, –11/2, –3/5, –1) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{5x}{3} - \frac{19}{3}$.

4. Найдем точку пересечения найденной и данной прямых:

$$\left[2x+4y-7=0, y=\frac{5x}{3}-\frac{19}{3}\right] \downarrow \text{L} \downarrow.$$

Результат: $\left[x=\frac{97}{26}, y=-\frac{3}{26}\right]$.

Проверка. Убедитесь в том, что расстояния совпадают:

**RASST**(3, –7, 97/26, –3/26) ↲ S ↲

**RASST**(–2, –4, 97/26, –3/26) ↲ S ↲

Ответ: $\left(\frac{97}{26};-\frac{3}{26}\right)$.

**Задача 18.** Точки $A,B,C$ лежат на одной прямой, точка $C$ — середина отрезка $AB$. Известны координаты точек $A$ и $C$: $A(a, b)$, $C(c, d)$. Найти координаты точки $B$.

Решение.

Известно, что середину отрезка $[\alpha, \beta]$ можно найти по формуле $\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Воспользуемся этим. Пусть $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Тогда $x_C=\frac{1}{2}(x_A+x_B)$, $y_C=\frac{1}{2}(y_A+y_B)\Rightarrow$

$\Rightarrow x_B=2x_C-x_A$, $y_B=2y_C-y_A$.

Введем функции

$$\boxed{\text{A\_X}(a,c):=2c-a}$$

$$\boxed{\text{ANC}(a,b,c,d):=[\text{A\_X}(a,c), \text{A\_X}(b,d)]}$$

**Пример.** Точка $C(-3; -1)$ — центр отрезка $AB$, $A(2; 1)$. Найдите координаты точки $B$.

Решение.

**ANC**(2, 1, –3, –1) ↲ S ↲. Результат: [–8, –3].

**Задача 19.** Найти расстояние от точки $M(d;\ h)$ до прямой $ax + by + c = 0$.

**Решение.**

Найдем точку пересечения прямой $ax + by + c = 0$ и прямой, перпендикулярной к ней, проходящей через точку $M(d;\ h)$.

1. Уравнение прямой, перпендикулярной к прямой $ax + by + c = 0$ и проходящей через точку $M(d;\ h)$, определяется функцией **LN_PER**.

2. Найдем точку пересечения этих прямых:

$$\left[ax+by+c=0, y=\frac{b}{a}x+h-\frac{bd}{a}\right]$$ ↲ L ↲.

Результат: $\left[x=\frac{b^2d-a(bh+c)}{a^2+b^2}, y=\frac{a^2h-abd-bc}{a^2+b^2}\right]$.

3. Найдем квадрат расстояния между точками.

$$\left[d-\frac{b^2d-a(bh+c)}{a^2+b^2}\right]^2+\left[h-\frac{a^2h-abd-bc}{a^2+b^2}\right]^2$$ ↲ S ↲.

Результат: $\frac{(ad+bh+c)^2}{a^2+b^2}$.

Введем функцию

$$\boxed{\mathbf{RASS2}(d,h,a,b,c):=\frac{|ad+bh+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

**Пример.** Найдите расстояние от точки (7; 3) до прямой $2x - y + 1 = 0$.

**RASS2**(7, 3, 2, –1, 1) ↲ S ↲. Результат: $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

**Задача 20.** Найти расстояние между двумя параллельными прямыми $ax + by + c = 0$ (1) и $ax + by + q = 0$ (2).

Решение.

Возьмем любую точку прямой (1). Например, пусть $x = 0$, тогда $y = -c/b$, следовательно, точка $(0; -c/b)$ принадлежит первой прямой. Расстояние от нее до второй прямой можно определить при помощи функции **RASS2**.

**RASS2**$(0, -c/b, a, b, q)$ ↲ S ↲. Результат: $\dfrac{|c-q|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Введем функцию

$$\boxed{\textbf{RAS\_PR}(a,b,c,q)=\frac{|c-q|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

**Пример.** Найдите расстояние между прямыми $3x - 2y + 5 = 0$ и $3x - 2y + 7 = 0$.

**RAS_PR**(3, –2, 5, 7) ↲ S ↲. Результат: $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$.

**Задача 21.** Две стороны квадрата лежат на прямых $4x - 3y + 15 = 0$ и $8x - 6y + 25 = 0$. Найти площадь квадрата.

Решение.

Данные прямые параллельны, так как $\dfrac{4}{8} = \dfrac{-3}{-6}$, следовательно, длина стороны квадрата равна расстоянию между этими прямыми.

Расстояние между данными прямыми:
**RAS_PR**(4, –3, 15, 25) ↲ S ↲. Результат: 2.
Ответ: площадь квадрата равна 4.
Можно было сразу искать площадь квадрата:
**RAS_PR**(4, –3, 15, 25)^2 ↲ S ↲. Результат: 4.

**Задача 22.** Найти уравнения прямых, параллельных прямой $ax + by + c = 0$ и удаленных от нее на $r$ единиц.

Решение.

Расстояние между двумя параллельными прямыми $ax + by + c = 0$ и $ax + by + q = 0$ определяется функцией **RAS_PR**. Для решения задачи надо найти $q$.

Введем **RAS_PR**($a$) = $r$ ↲ S ↲ F4 ^ 2 L q ↲.

Результат: $q = c \pm r\sqrt{a^2 + b^2}$.

Следовательно, уравнения искомых прямых

$$ax + by + c \pm r\sqrt{a^2 + b^2} = 0\cdot$$

Выразим из этих равенств $y$.

Введем функции

$$\boxed{\textbf{LIN1\_PAR}(r,a,b,c) := y = -\frac{ax}{b} - \frac{r\sqrt{a^2 + b^2} + c}{b}}$$

$$\boxed{\textbf{LIN2\_PAR}(r,a,b,c) := y = -\frac{ax}{b} + \frac{r\sqrt{a^2 + b^2} - c}{b}}$$

**Пример 1. LIN1_PAR**(3, 1, –2, 4) ↲ S ↲.

Результат: $y = \frac{x}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} + 2$.

**Пример 2. LIN2_PAR**(3, 1 ,–2, 4) ↲ S ↲.

Результат: $y = \frac{x}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2} + 2$.

**Задача 23**. Найти координаты точек, лежащих на перпендикуляре к данной прямой $ax + by + c = 0$ и удаленных от точки $M$, принадлежащей данной прямой и имеющей абсциссу $d$, на расстояние в $r$ единиц.

Решение.

1. Через точку $M$ с абсциссой $d$ проведем прямую, перпендикулярную данной прямой; эту задачу решает функция **LN2_PER**:

**LN2_PER**($d$) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{b}{a}x - \frac{ad + c}{b} - \frac{bd}{a}$. (1)

2. Искомые точки лежат на полученном перпендикуляре и на прямых, параллельных данной прямой и лежащих на расстоянии $r$ от нее. Найдем уравнения этих прямых:

**LIN1_PAR**($r$) ↵ S ↵.

Результат: $y = -\left(ax + r\sqrt{a^2 + b^2} + c\right)b^{-1}$. (2)

**LIN2_PAR**($r$) ↵ S ↵.

Результат: $y = -\left(ax - r\sqrt{a^2 + b^2} + c\right)b^{-1}$. (3)

3. Найдем координаты точек пересечения полученных прямых (2) и (3) и перпендикуляра к ним (1):

$$\left[y = \frac{b}{a}x - \frac{ad+c}{b} - \frac{bd}{a}, y = -\left(ax + r\sqrt{a^2+b^2} + c\right)b^{-1}\right]$$ ↵L ↵E ↵.

$$\left[y = \frac{b}{a}x - \frac{ad+c}{b} - \frac{bd}{a}, y = -\left(ax - r\sqrt{a^2+b^2} + c\right)b^{-1}\right]$$ ↵L ↵E ↵.

Используя полученные результаты, введем функции

$$\mathbf{TOCH\_R1}(r,d,a,b,c) :=$$
$$\left[d - \frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{ad+c}{b} - \frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

$$\mathrm{TOCH\_R2}(r,d,a,b,c) :=$$
$$\left[d + \frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{ad+c}{b} + \frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

**П р и м е р.** Найти точки, удаленные от прямой $2x-3y-2=0$ и от точки $M$ этой прямой с абсциссой $-2$ на 3 единицы.

Р е ш е н и е.

**TOCH_R1**(3, –2, –3, –2) ↵ S ↵.

Результат: $\left[-\frac{6\sqrt{13}}{13}-2,\ \frac{9\sqrt{13}}{13}-2\right]$.

**TOCH_R2**(3, –2, –3, –2) ↵ S ↵.

Результат: $\left[\frac{6\sqrt{13}}{13}-2,\ -\frac{9\sqrt{13}}{13}-2\right]$.

Сделайте проверку полученных результатов.

**Задача 24**. Точка $M$ с абсциссой $d$ лежит на прямой $ax + by + c = 0$. Найти координаты точек данной прямой, удаленных от точки $M(d; h)$ на $r$ единиц.

Р е ш е н и е.

Пусть $h$ — ордината точки $M$, а $B(s; t)$ — искомая точка.

Тогда $\begin{cases} ad + bh + c = 0 \\ as + bt + c = 0 \\ \mathrm{RASST}(d,h,s,t)^2 = r^2 \end{cases}$

Упростим третье уравнение и решим систему относительно переменных $s$ и $t$. Используя полученные результаты, введем функции

$$\mathbf{TOCH1\_R}(r,d,a,b,c) := \left[d-\frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{ad+c}{b}+\frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

$$\mathbf{TOCH2\_R}(r,d,a,b,c) := \left[d+\frac{br}{\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{ad+c}{b}-\frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

**П р и м е р.** Найти координаты точек, удаленных от точки $M$ с абсциссой, равной 2, на расстояние в 5 единиц, если все три точки лежат на одной прямой $3x - 4y + 2 = 0$.

Решение.

**TOCH1_R**(5, 2, 3, –4, 2) ↵ S ↵. Результат: $[6, 5]$.

**TOCH2_R**(5, 2, 3, –4, 2) ↵ S ↵. Результат: $[-2, -1]$.

Убедитесь, что обе найденные точки лежат на данной прямой. Найдите расстояние от найденных точек до данной точки $M$.

**Задача 25.** Найти тангенс угла между двумя непересекающимися прямыми с угловыми коэффициентами $k$ и $r$.

Решение.

Пусть $\operatorname{tg}\alpha = k$, $\operatorname{tg}\beta = r$. Требуется найти $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ или $\operatorname{tg}(\beta - \alpha)$. Известно, что $\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \dfrac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \dfrac{r - k}{1 + rk}$. Будем считать, что ищем тангенс острого угла между прямыми. Введем функцию **TG_UGPR**, определяющую этот тангенс.

$$\boxed{\mathbf{TG\_UGPR}(r, k) := \left|\frac{r - k}{1 + rk}\right|}$$

**Пример 1.** Найти тангенс острого угла между прямыми с угловыми коэффициентами $k = \dfrac{1}{3}$ и $r = -\dfrac{1}{2}$.

Решение.

$\mathbf{TG\_UGPR}\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{2}\right)$ ↵ S ↵. Результат: 1 ⇒ угол равен 45°.

При желании вы можете построить рисунок, взяв, например, прямые $y = \dfrac{x}{3}$ и $y = -\dfrac{x}{2}$, и зрительно убедиться в правдоподобности результатов.

**Пример 2.** Найти угол между прямыми с угловыми коэффициентами, равными 1 и $-\sqrt{3} - 2$. Построить рисунок при условии, что прямые пересекаются в точке (3; 4).

Решение.

$\mathbf{TG\_UGPR}\left(1, -\sqrt{3} - 2\right)$ ↵ S ↵. Результат: $\sqrt{3}$ ⇒ угол равен 60°.

Для построения рисунка найдем уравнения прямых.
**LINE2**(1, 3, 4) ↲ S ↲. Результат: $y = x + 1$.

**LINE2**$(-\sqrt{3}-2, 3, 4)$ ↲ S ↲.

Результат: $y = -x\left(\sqrt{3}+2\right) + 3\sqrt{3} + 10$.

Сделайте рисунок и зрительно убедитесь в правдоподобности результатов.

**Задача 26**. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(d; h)$ под углом, тангенс которого равен $u$, к прямой с угловым коэффициентом $k$.

Решение.

Пусть уравнение искомой прямой $y = cx + q$.

$\dfrac{c-k}{1+ck} = u$ L c ↲. Результат: $c = -\dfrac{k+u}{ku-1}$.

В уравнение прямой $y = cx + q$ подставим вместо $c$ найденное выражение, $x = d$, $y = b$ и выразим из полученного выражения $q$ (L q ↲). Подставим в уравнение $y = cx + q$ полученные выражения вместо $c$ и $q$. Дадим полученной функции имя **L_UG**.

$$\boxed{\mathrm{L\_UG}(u,k,d,h) := y = \frac{k+u}{1-ku}x - d\frac{k+u}{1-ku} + h}$$

**Пример**. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; 3)$ под углом 45° к прямой с угловым коэффициентом $k = \sqrt{3}$.

Решение.

**L_UG**(1, $\sqrt{3}$, 2, 3) ↲S ↲. Результат: $y = -x(\sqrt{3}+2) + 2\sqrt{3} + 7$.

**L_UG**(–1, $\sqrt{3}$, 2, 3) ↲S ↲. Результат: $y = x(2-\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} - 1$.

**Задача 27.** Используя функцию **LINE2**, получим второй вариант функции **L_UG**.

Пусть $\mathrm{tg}\,\alpha = k$, $\mathrm{tg}\,\beta = u$. Найдем угловой коэффициент искомой прямой, то есть $\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta)$.

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta} = \frac{k+u}{1-ku}.$$

Следовательно, для решения задачи достаточно при обращении к функции **LINE2** вместо $k$ записать $\frac{k+u}{ku}$ (иначе $k := \frac{k+u}{1-ku}$). Новой функции дадим имя LL_UG.

$$\boxed{\mathbf{LL\_UG}(u,k,d,h) := \mathbf{LINE2}\left(\frac{k+u}{1-ku},d,h\right)}$$

**П р и м е р 1.** Выполните предыдущий пример, используя функцию **LL_UG**.

**П р и м е р 2.** Введите и упростите: **LL_UG**($u$) ↵ S ↵. Сравните с функцией **L_UG**.

**Задача 28.** Дана прямая $ax + by + c = 0$. Найти уравнение такой прямой, тангенс угла которой с данной прямой равен $u$ и которая проходит через точку $A(d; h)$.

Р е ш е н и е.

Заменим в равенстве, полученном при решении задачи 26, $k$ на $—a/b$, получим функцию, которой дадим имя L_UG2.

$$\boxed{\mathbf{L\_UG2}(u,d,h,a,b) := y = \frac{bu-a}{au+b}x - \frac{bd\left(u^2+1\right)}{u(au+b)} + \frac{d}{u} + h}$$

**П р и м е р.** Найти уравнения прямых, проходящих через точку $A(1; 4)$ прямой $3x - 2y + 5 = 0$ и составляющих с данной прямой угол 60°.

Р е ш е н и е.

$\text{tg}60° = \sqrt{3}$. Воспользуемся функцией L_UG.

1. **L_UG2** $(\sqrt{3},1,4,3,-2)$ ↵ S ↵.

Результат: $y = -x\left(\frac{13\sqrt{3}}{23} + \frac{24}{23}\right) + \frac{13\sqrt{3}}{23} + \frac{116}{23}$.

2. **L_UG2** $(-\sqrt{3},1,4,3,-2)$ ↵ S ↵.

Результат: $y = x\left(\frac{13\sqrt{3}}{23} - \frac{24}{23}\right) - \frac{13\sqrt{3}}{23} + \frac{116}{23}$.

Проверка. Найдем тангенс угла между данной прямой и первой из полученных.

$$\mathbf{TG\_UGPR}\left(-\frac{13\sqrt{3}}{23}-\frac{24}{23},\frac{3}{2}\right) \lrcorner\, S \lrcorner. \text{ Результат: } \sqrt{3}.$$

Проверьте второй результат.

Постройте все три прямые и зрительно убедитесь в том, что прямая $3x - 2y + 5 = 0$ является биссектрисой одного из углов между найденными прямыми.

3. Введите и упростите **LL_UG2**(1, 4, 5, 2, –3). Сформулируйте решаемую задачу, закончите ее решение, сделайте проверку: постройте все три прямые и зрительно убедитесь в том, что одна из них — биссектриса угла между двумя другими.

**Задача 29.** Введем функцию, решающую предыдущую задачу, используя функцию **L_UG**. Достаточно угловой коэффициент заменить на $-a/b$. Дадим новой функции имя LL_UG2.

$$\boxed{\mathbf{LL\_UG2}(u,d,h,a,b) := \mathbf{L\_UG}\left(u,-\frac{a}{b},d,h\right)}$$

**Пример 1.** Решите предыдущий пример, используя функцию LL_UG2.

**Пример 2.** Введите и упростите: **LL_UG**($u$) ↲ S ↲. Сравните результат с функцией **L_UG**.

**Задача 30.** Известно уравнение прямой $ax + by + c = 0$. Найти уравнение прямой, пересекающей данную прямую под углом, тангенс которого равен $u$, в точке $M(d;\, h)$, при условии, что прямые не пересекаются под прямым углом.

Решение.

По условию уравнение первой прямой $ax + by + c = 0$. Точка $M(d;\, h)$ принадлежит этой прямой, следовательно, $ad + bh + c = 0 \Rightarrow h = -\dfrac{ad+c}{b}$. Угловой коэффициент данной прямой $k = -\dfrac{a}{b}$. Воспользуемся результатами задачи, в которой введена функция **L_UG**, и полученными равенствами, получим уравнение искомой прямой.

Введем функцию, решающую поставленную задачу.

$$\mathbf{L\_UG3}(u,d,a,b,c) := y = \frac{bu-a}{au+b}x - \frac{bd(u^2+1)}{u(au+b)} + \frac{d}{u} - \frac{ad+c}{b}$$

Аналогично тому, как ввели функцию **LL_UG2**, введем функцию **LL_UG3**, решающую ту же задачу, что и **L_UG3**.

$$\mathbf{LL\_UG3}(u,d,a,b,c) := \mathbf{L\_UG}\left(u, -\frac{a}{b}, d, -\frac{ad+c}{b}\right)$$

**П р и м е р.** Найти уравнения прямых, проходящих через точку с абсциссой 1 и составляющих с прямой $3x - 2y + 5 = 0$ угол 60°.

Р е ш е н и е.

**LL_UG3**($\sqrt{3}$, 1, 3, –2,5)↵ S ↵

или

**L_UG3**( $\sqrt{3}$, 1, 3, –2,5)↵ S ↵

**LL_UG3**($-\sqrt{3}$, 1, 3, –2,5)↵ S ↵

**Задача 31.** Дана точка $M(d; h)$ и прямая $ax + by + c = 0$. Найти координаты точки $N(x;y)$, симметричной точке $M$ относительно данной прямой.

Р е ш е н и е.

Будем считать $a \neq 0$, иначе решение задачи тривиально.

1. Найдем точку пересечения прямой и перпендикуляра к ней, проходящего через точку $M(d; h)$ (уравнение перпендикуляра найдено в задаче 5), — точку $c$.

[$ax + by + c = 0$, **LN_PER**($d$)]↵ S ↵ L ↵ или

**T_PER**(d)↵ S ↵.

2. Искомая точка $N$ симметрична точке $M$ относительно точки $C$. Найдите ее координаты, воспользовавшись функцией **ANC**.

Используя результат, введем функцию

$$\mathbf{TOCH\_SIM}(d,h,a,b,c):=$$
$$\left[-2\frac{a(bh+c)-b^2d}{a^2+b^2}-d,h-2\frac{b(ad+bh+c)}{a^2+b^2}\right]$$

Найдите другие способы решения задачи.

**Пример.** Найдите координаты точки, симметричной точке $M(2; -3)$ относительно прямой $x - 2y + 6 = 0$.

Решение.

**TOCH_SIM**(2, –3, 1, –2, 6) ↲ S ↲. Результат: $\left[-\frac{18}{5},\frac{41}{5}\right]$.

**Задача 32**. Построить отрезок, симметричный отрезку $AB$ относительно прямой $2x + 5y - 4 = 0$, если $A(-3; 4)$, $B(5; 8)$.

Решение.

1. Найдем координаты точек, симметричных точкам $A$ и $B$ относительно данной прямой — это концы искомого отрезка $CD$:

**TOCH_SIM**(–3, 4, 2, 5, –4) ↲ S ↲. Результат: $\left[-\frac{127}{29},\frac{16}{29}\right]$.

**TOCH_SIM**(5, 8, 2, 5, –4) ↲ S ↲. Результат: $\left[-\frac{39}{29},-\frac{228}{29}\right]$.

2. Уравнение прямой $CD$:
**LINE**(–127/29, 16/29, –39/29, –228/29) ↲ S ↲.

Результат: $y=-\frac{61x}{22}-\frac{255}{22}$.

Для большей наглядности найдем уравнения прямых $AC$ и $BD$.

$AC$: $y=\frac{5x}{2}+\frac{23}{2}$, $BD$: $y=\frac{5x}{2}-\frac{9}{2}$.

Построим также отрезки $AB$ и $CD$.

$AB$: $y = \frac{x}{2} + \frac{11}{2}$ $\Rightarrow$ надо построить отрезок $\left[x, y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right]$ при $x \in [-3,5]$.

$CD$: надо построить отрезок $\left[x, -\frac{61x}{22} - \frac{255}{22}\right]$ при $x \in \left[-\frac{127}{29}, -\frac{39}{29}\right]$.

Постройте рисунок.

## Окружность

**Задача 1.** Окружность задана уравнением $x^2 + y^2 - 6x + 14y - 6 = 0$. Составить уравнение ее диаметра, перпендикулярного хорде $x - 2y - 2 = 0$.

Сделать рисунок.

Решение.

1. Найдем координаты центра окружности. Для этого перепишем уравнение окружности в виде $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 64$. Следовательно, центр окружности — точка $(3; -7)$.

2. Уравнение прямой, перпендикулярной данной хорде и проходящей через центр окружности:

**LN_PER**(3, –7, 1, –2, –2) ↵ S ↵. Результат: $y = -2x - 1$.

3. Для построения рисунка найдите точки пересечения данной хорды и найденной прямой с окружностью и постройте рисунок.

**Задача 2.** Подобрать значения параметра $a$ так, чтобы окружности $(x-a)^2 + (y+1)^2 = 1$ и $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ касались: а) изнутри; б) извне.

Сделать рисунки.

Ответ: а) $a \in \{0; 2\}$, б) $a \in \{-2; 4\}$. Сделайте рисунки.

**Задача 3.** Составить уравнение окружности с центром в точке $M(-2; 3)$ и проходящей через точку $N(5; 7)$.

Решение.

1. Найдем расстояние между точками $M$ и $N$ — это радиус окружности.

**RASST**(–2, 3, 5, 7) ↵ S ↵. Результат: $\sqrt{65}$.
Уравнение окружности $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 65$.
Параметрическое задание окружности

$$\left[-2 + \sqrt{65}\cos t, 3 + \sqrt{65}\sin t\right].$$

Сделайте рисунок.

**Задача 4.** Окружность проходит через точки $A(1; 4)$, $B(-7; 4)$, $C(2; -5)$. Построить эту окружность.

Решение.

Искомая окружность является описанной около треугольника $ABC$, следовательно, ее центр лежит на пересечении срединных перпендикуляров к отрезкам $AB$, $BC$, $AC$.

1. Найдем уравнение прямой $AC$:

**LINE**(1, 4, 2, –5) ↵ S ↵. Результат: $y = 13 - 9x$.

2. Середина отрезка $AC$:

**C_OTR**(1, 4, 2, –5) ↵ S ↵. Результат: $\left[\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$.

3. Очевидно, уравнение прямой $AB$ $y = 4$. Для нахождения уравнения этой прямой можно использовать функцию **LINE**.

4. Середина отрезка $AB$:

**C_OTR**(1, 4, –7, 4) ↵ S ↵. Результат: [–3, 4].

Следовательно, уравнение срединного перпендикуляра к отрезку $AB$ $x = -3$. Можно воспользоваться функцией X_C:

**X_C**(1, –7) ↵ S ↵. Результат: –3.

5. Уравнение срединного перпендикуляра к отрезку $AC$:

**LN_PER**(3/2, –1/2, 9, 1) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{x}{9} - \frac{2}{3}$.

6. Найдем координаты точки пересечения найденных срединных перпендикуляров:

$\left[y = \frac{x}{9} - \frac{2}{3}, x = -3\right]$ ↲ L ↲ . Результат: $[x = -3, y = -1]$.

Или можно было в уравнение прямой подставить $x := -3$ и упростить результат.

7. Радиус окружности — расстояние от найденной точки до любой из данных точек, например, до точки $A$:

**RASST**(–3, –1, 1, 4) ↲ S ↲ . Результат: $\sqrt{41}$.

8. Параметрическое задание искомой окружности

$$\left[-3 + \sqrt{41}\cos t, -1 + \sqrt{41}\sin t\right].$$

Постройте окружность и для большей наглядности треугольник $ABC$.

**Задача 5.** Составить уравнение окружности, проходящей через точки $M(-1; 3)$ и $N(4; -2)$, если ее центр лежит на прямой $2y + 3x + 5 = 0$.

Р е ш е н и е.

Центр окружности лежит на пересечении срединного перпендикуляра к отрезку $MN$ и данной прямой.

1. Найдем уравнение прямой $MN$:

**LINE**(–1, 3, 4, –2) ↲ S ↲ . Результат: $y = 2 - x$ .

2. Центр отрезка $MN$:

**C_OTR**(–1, 3, 4, –2) ↲ S ↲ . Результат: [3/2, 1/2].

3. Уравнение прямой, перпендикулярной к отрезку $MN$, проходящей через середину этого отрезка:

**LN_PER**(3/2, 1/2, 1, 1) ↲ S ↲. Результат: $y = x - 1$.

4. Найдем точку пересечения этих двух прямых:

$[2y + 3x + 5 = 0, y = x - 1]$ ↲ L ↲. Результат: $\left[-\frac{3}{5}, -\frac{8}{5}\right]$.

Это координаты центра окружности.

5. Найдем расстояние между центром окружности и точкой $M$:

**RASST**(–3,5,–8/5,–1,3) ↵ S ↵. Результат: $\frac{\sqrt{533}}{5}$.

Для контроля можно найти также расстояние между центром и точкой $N$.

6. Параметрическое задание окружности

$$\left[-\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{533}}{5}\cos t,-\frac{8}{5}+\frac{\sqrt{533}}{5}\sin t\right].$$

Постройте окружность, отрезок $MN$ и данную прямую.

**Задача 6**. Написать уравнение касательной к окружности $x^2 - 8x + y^2 + 6y = 0$ (1) в точке с абсциссой, равной единице.

Решение.

1. Убедимся в том, что на окружности лежат точки с абсциссами, равными единице. Для этого в уравнение окружности подставим вместо $x$ единицу, решим полученное уравнение (L ↵). Результат: $y = -7$, $y = 1$.

2. Найдем уравнения прямых, проходящих через центр окружности и найденные точки:

**LINE**(1, –7, 4, –3) ↵ S ↵. Результат: $y=\frac{4x}{3}-\frac{25}{3}$.

**LINE**(1, 1, 4, –3) ↵ S ↵. Результат: $y=\frac{7}{3}-\frac{4x}{3}$.

3. Уравнение прямых, перпендикулярных к этим прямым, проходящих соответственно через точки (1; –7) и (1; 1):

**LN_PER**(1, –7, 4, –3) ↵ S ↵. Результат: $y=-\frac{3x}{4}-\frac{25}{4}$.

**LN_PER**(1, 1, 4, 3) ↵ S ↵. Результат: $y=\frac{3x}{4}+\frac{1}{4}$.

Это уравнения искомых касательных.

Ответ: $3x + 4y + 25 = 0$, $3x - 4y + 1 = 0$.

Постройте окружность и найденные касательные. Поставьте указатель «+» в точки (1; –7) и (1; 1) (**Move**) и зрительно убедитесь в том, что это точки касания.

**Задача 7.** Построить окружность, имеющую центр в точке $M(-1; -3)$ и касающуюся прямой $3x + 2y - 4 = 0$, и найти точку касания.

Р е ш е н и е.

1. Найдем расстояние от точки $M$ до данной прямой — радиус искомой окружности:

**RASS2**(–1, –3, 3, 2, – 4) ↲ S ↲. Результат: $\sqrt{13}$ .

2. Параметрическое задание искомой окружности

$$\left[\sqrt{13}\cos t - 1, \sqrt{13}\sin t - 3\right].$$

Найдем точку касания.

*1-й способ.*

3(1). Составим уравнение прямой, перпендикулярной данной прямой и проходящей через точку $M(-1; -3)$:

**LN_PER**(–1, –3, 3, 2) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{2x}{3} - \frac{7}{3}$ .

4(1). Найдем точку пересечения данной и найденной прямых:

$\left[3x + 2y - 4 = 0, y = \frac{2x}{3} - \frac{7}{3}\right]$ ↲ L ↲. Результат: $[x = 2, y = -1]$.

Это координаты точки касания.

*2-й способ.*

3(2). Из уравнения $3x + 2y - 4 = 0$ выразим $y$: L ↲ $y$ ↲.

Результат: $y = -\frac{3x-4}{2}$ .

4(2). Введем уравнение окружности

$$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 13.$$

5(2). Подставим в уравнение окружности вместо $y$ найденное выражение (M S), решим полученное уравнение (L ↲). Результат: $x = 2$.

6(2). В уравнение прямой $y = -\frac{3x-4}{2}$ подставим $x = 2$ (M S) и упростим (S ↲). Результат: $y = -1$.

Сделайте рисунок. Поставьте «+» в точку касания.

**Задача 8.** Построить окружность с радиусом 5, касающуюся прямой $7x + 4y - 28 = 0$, зная, что ее центр лежит на оси $OY$.

Решение.

1. Центр окружности лежит на оси $OY$, следовательно, абсцисса центра равна нулю, следовательно, уравнение окружности имеет вид $x^2 + (y - b)^2 = 25$. Требуется найти $b$.

2. Расстояние от центра окружности $(0; b)$ до данной прямой по условию равно 5. Получаем уравнение:

**RASS2**$(0, b, 7, 4, -28) = 5$.

3. Решим полученное уравнение ( L ↵).

Результат: $b = 7 - \dfrac{5\sqrt{65}}{4}$ , $b = 7 + \dfrac{5\sqrt{65}}{4}$.

4. Параметрическое задание окружностей

$$\left[5\cos t, 7 - \frac{5\sqrt{65}}{4} + 5\sin t\right], \left[5\cos t, 7 + \frac{5\sqrt{65}}{4} + 5\sin t\right].$$

Постройте рисунок — прямую и обе окружности.

**Задача 9.** Построить окружность, касающуюся прямой $5x + 2y - 10 = 0$ (1) в точке $M(4; -5)$, если ее центр лежит на прямой $y = 7x + 5$ (2).

Решение.

1. Уравнение прямой, перпендикулярной прямой $5x + 2y - 0 = 0$ и проходящей через точку $M(4; -5)$:

**LN_PER**(4, –5, 5, 2) ↵ S ↵. Результат: $y = \dfrac{2x}{5} - \dfrac{33}{5}$ (3).

2. Найдем точку пересечения прямых (2) и (3) — это центр искомой окружности:

$$\left[y = 7x + 5, y = \frac{2x}{5} - \frac{33}{5}\right] \text{ ↵ L ↵. Результат: } \left[x = -\frac{58}{33}, y = -\frac{241}{33}\right].$$

3. Найдем расстояние от центра окружности до данной точки — это радиус окружности:

**RASST**(–58/33, –241/33, 4, –5) ↵ S ↵. Результат: $\dfrac{38\sqrt{29}}{33}$.

4. Параметрическое задание искомой окружности

$$\left[-\frac{58}{33}+\frac{38\sqrt{29}}{33}\cos t, -\frac{241}{33}+\frac{38\sqrt{29}}{33}\sin t\right].$$

Постройте рисунок: окружность и данные прямые. Установите указатель «+» в точку касания.

**Задача 10**. Построить окружность, которая касается прямых $4x + 5y - 7 = 0$ и $4x + 5y + 9 = 0$ и точки $M(1; 3/5)$.

Решение.

1. Данные прямые параллельны. Проверим, принадлежит ли данная точка какой-либо из рассматриваемых прямых. Точка $M$ принадлежит первой прямой. Следовательно, данная точка — точка касания окружности и первой прямой. Центр окружности лежит на середине отрезка, перпендикулярного данным прямым с концами на этих прямых — отрезка $MN$.

2. Найдем расстояние от точки $M$ до второй прямой — диаметр окружности:

**RASS2**(1, 3/5, 4, 5, 9) ↲ S ↲. Результат: $\frac{6\sqrt{41}}{41}$.

Или можно искать расстояние между данными прямыми:

**RAS_PR**(4, 5, –7, 9) ↲ S ↲. Результат тот же.

3. Найдем уравнение прямой, перпендикулярной данным и проходящей через точку $M$:

**LN_PER**(1, 3/5, 4, 5) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{5x}{4} - \frac{13}{20}$.

4. Координаты отрезка $MN$:

$\left[4x+5y+9=0, y=\frac{5x}{4}-\frac{13}{20}\right]$ ↲ L ↲. Результат: $\left[-\frac{23}{41}, -\frac{277}{205}\right]$.

5. Координаты центра отрезка — центра искомой окружности:

**C_OTR**(1, 3/5, –23/41, –277/205) ↲ S ↲. Результат: $\left[\frac{9}{41}, -\frac{77}{205}\right]$.

6. Параметрическое задание окружности

$$\left[\frac{9}{41}+\frac{8\sqrt{41}}{41}\cos t, \frac{77}{205}+\frac{8\sqrt{41}}{41}\sin t\right].$$

Сделайте рисунок: постройте данные прямые, окружность, установите указатель «+» в данную точку (**Move**).

**Задача 11**. Найти уравнение семейства окружностей, касающихся двух параллельных прямых $3x + 5y - 10 = 0$ (1) и $3x + 5y + 16 = 0$ (2).

Решение.

*1-й способ.*

1. Найдем расстояние между данными прямыми:

**RAS_PR**(3, 5, –10, 16) ↵ S ↵. Результат: $\frac{13\sqrt{34}}{17}$.

Или возьмем любую точку, принадлежащую первой прямой, например (0; 2), и найдем расстояние от этой точки до второй прямой:

**RASS2**(0, 2, 3, 5, 16) ↵ S ↵. Результат: $\frac{13\sqrt{34}}{17}$.

Это диаметр окружностей искомого семейства.

2. Найдем уравнение прямой, перпендикулярной данным прямым и проходящей через произвольную точку, например, через точку с абсциссой 0 первой прямой:

**LN2_PER**(0, 3, 5, –10) ↵ S ↵ или

**LN_PER**(0, 2, 3, 5) ↵ S ↵.

Результат: $y=\frac{5x}{3}+2$.

3. Найдем точку пересечения найденной прямой с прямой (2):

$\left[3x+5y+16=0, y=\frac{5x}{3}+2\right]$ ↵ L ↵.

Результат: $\left[x=-\frac{39}{17}, y=-\frac{31}{17}\right]$.

4. Найдем координаты середины отрезка с концами в точках (0; 2) и (–39/17; –31/17).

**C_OTR**(0, 2, –39/17, –31/17) ↲ S ↲. Результат: $\left[-\frac{39}{34}, \frac{3}{34}\right]$.

Это координаты центра одной из окружностей.

5. Уравнение прямой, параллельной данным и проходящей через найденную точку:

**LN_PAR**(–39/34, 3/34, 3, 5) ↲ S ↲. Результат: $y=-\frac{3x}{5}-\frac{3}{5}$.

6. Пусть точка $(a,b)$ — центр какой-либо из окружностей семейства. Так как эта точка лежит на прямой $y=-\frac{3x}{5}-\frac{1}{5}$, то $b=-\frac{3a}{5}-\frac{3}{5}$. Поэтому параметрическое задание любой окружности семейства имеет вид:

$$\left[a+\frac{13\sqrt{34}}{34}\cos t, -\frac{3a}{5}-\frac{3}{5}+\frac{13\sqrt{34}}{34}\sin t\right].$$

*2-й способ.*

1. Пересечем данные прямые любой прямой, например $y=0$, и найдем точки пересечения новой прямой с данными.

2. Найдем координаты центра симметрии двух найденных точек.

Продолжите решение самостоятельно.

**Задача 12**. Построить касательную к окружности $x^2+y^2-6x+5y-\frac{85}{4}=0$, параллельную прямой $6x-3y+7=0$.

Решение.

1. Запишем уравнение окружности в виде $(x-3)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{61}{4}$. Следовательно, центр окружности в точке $C(3; -5/2)$.

2. Через центр окружности проведем прямую, перпендикулярную данной:

**LN_PER**(3, –5/2, 6, –3) ↵ S ↵. Результат: $y = -\frac{x}{2} - 1$.

3. Найдем абсциссы точек пересечения окружности и проведенной прямой: подставим в уравнение окружности (M S) $y := -\frac{x}{2} - 1$ и решим полученное уравнение (L ↵).

Результат: $x = \frac{\sqrt{305}}{5} + 3$, $x = 3 - \frac{\sqrt{305}}{5}$ .

4. Проведем прямые, перпендикулярные данной прямой и проходящие через точки этой прямой с найденными абсциссами:

**LN2_PER** $(3 + \sqrt{305}/5, 1/2, 1, 1)$ ↵ S ↵.

Результат: $y = 2x + \frac{\sqrt{305}}{2} - \frac{17}{2}$.

**LN2_PER** $(3 - \sqrt{305}/5, 1/2, 1, 1)$ ↵ S ↵.

Результат: $y = 2x - \frac{\sqrt{305}}{2} - \frac{17}{2}$.

Постройте окружность, данную прямую и найденные касательные.

**Задача 13.** Построить касательную к окружности $4x^2 - 20x + 4y^2 + 28y - 7 = 0$, перпендикулярную прямой $7x - 2y + 10 = 0$.

Решение.

1. Запишем уравнение окружности в виде $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$. Следовательно, центр окружности в точке $\left(\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}\right)$.

2.Найдите уравнение прямой, параллельной данной и проходящей через центр окружности.

3. Найдите точки пересечения найденной прямой с окружностью.

4. Найдите уравнения прямых, перпендикулярных найденной прямой и проходящих через найденные точки.

Постройте рисунок.

**Задача 14.** Построить окружность, проходящую через точку (–5; 2) и касающуюся оси ординат в точке (0; 4).

Решение.

1. Из условия следует, что центр окружности лежит в точке с координатами ($a$; 4), радиус окружности равен $|a|$, где $a$ — искомое.

2. Составим уравнение на основании того, что квадрат расстояния от центра окружности ($a$; 4) до данной точки окружности (–5; 2) равен $a^2$.

$$\mathbf{RASST}(a, 4, -5,2)^2 = a^2$$

3. Решим полученное уравнение ( L ↵). Результат: $a = -\dfrac{29}{10}$.

Следовательно, центр окружности в точке $\left(-\dfrac{29}{10};\ 4\right)$.

4. Искомое уравнение $\left(x + \dfrac{29}{4}\right)^2 + (y-4)^2 = \dfrac{29}{10}$ .

5. Параметрическое задание окружности

$$\left[-\frac{29}{10} + \frac{29}{10}\cos t, 4 + \frac{29}{10}\sin t\right].$$

Постройте чертеж, зрительно убедитесь в правильности вычислений.

**Задача 15.** Построить окружность, касающуюся трех данных прямых: $x + y - 2 = 0$ (1), $x - y + 4 = 0$ (2), $x - 7y = 0$ (3).

Решение.

1. Пусть точка ($a$, $b$) — центр искомой окружности. Воспользуемся тем, что расстояния от центра окружности до заданных прямых равны. Приравняем квадраты расстояний до прямых (1) и (2):

$$\mathbf{RASS2}(a, b, 1,1, -2)^2 - \mathbf{RASS2}(a, b, 1, -1, 4)^2 = 0$$

2. Решим это уравнение (L ↲). Результат: $a = -1$ или $b = 3$.

3. Составим и решим второе уравнение:

**RASS2**($a$, $b$, 1,1, –2)$^2$ –**RASS2**($a$, $b$, 1, –7, 0)$^2$ = 0 ↲ S ↲

Полученный результат в дальнейшем будет обозначаться через (4). Подставим в него $a = -1$ и решим полученное уравнение ( L ↲). Результат: $b = \frac{7}{6}$, $b = -8$. Следовательно, центр одной из окружностей в точке $\left(-1;\frac{7}{6}\right)$, второй — в точке (–1;–8).

4. Найдем радиус первой окружности. Для этого найдем расстояние от точки $\left(-1;\frac{7}{6}\right)$ до любой из данных прямых.

**RASS2**(–1, 7/6, 1, 1, –2) ↲ S ↲. Результат: $\frac{11\sqrt{2}}{12}$ .

5. Параметрическое задание этой окружности

$$\left[-1+\frac{11\sqrt{2}}{12}\cos t, \frac{7}{6}+\frac{11\sqrt{2}}{12}\sin t\right].$$

Найдите параметрическое задание второй окружности.

6. В (4) подставим $b = 3$ и решим полученное уравнение. Результат $a = \frac{8}{3}$ и $a = -\frac{13}{2}$ .Следовательно, центры третьей и четвертой окружностей в точках $\left(\frac{8}{3};3\right)$ и $\left(-\frac{13}{2};3\right)$. Найдем расстояния от этих точек до любой из прямых. Эти расстояния — радиусы искомых окружностей.

Продолжите решение задачи самостоятельно. Сделайте рисунок.

**Задача 16.** Построить окружность с радиусом $\sqrt{5}$, которая касается прямой $3x - y + 7 = 0$ в точке с абсциссой –1.

Решение.

Очевидно, можно построить две окружности, удовлетворяющие поставленным условиям. Найдем координаты их центров.

**TOCH_R1** $(\sqrt{5},-1,3,-1,7)$↵S↵.

Результат: $\left[-\frac{3\sqrt{2}}{2}-1,\frac{\sqrt{2}}{2}+4\right]$.

**TOCH_R2** $(\sqrt{5},-1,3,-1,7)$↵S↵.

Результат: $\left[-\frac{3\sqrt{2}}{2}-1,4-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Уравнения окружностей $\left(x+\frac{3\sqrt{2}}{2}+1\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}-4\right)^2=5$,

$\left(x-\frac{3\sqrt{2}}{2}+1\right)^2+\left(y-4+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=5$.

Введите параметрические задания окружностей и постройте рисунок.

## Построение биссектрис углов между двумя прямыми

**Задача 1.** Пусть требуется найти уравнения биссектрис углов между прямыми $ax+by+c=0$ и $lx+my+n=0$.

Решение.

Воспользуемся тем, что точки биссектрисы равноудалены от данных прямых. Следовательно, должно выполняться равенство

$$\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|lx+my+n|}{\sqrt{l^2+m^2}}.$$

Рассмотрим два случая.

1. $\dfrac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{lx+my+n}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Введем уравнение в виде $w(ax+by+c)=z(lx+my+n)$, решим его относительно $y$ (L $y$ ↵), результат: $y=-\dfrac{x(lz-aw)+nz-cw}{mz-bw}$.

В полученное равенство сделаем подстановки:

**M S** $z:=\sqrt{a^2+b^2}$, $w:=\sqrt{l^2+m^2}$ .

Для полученного результата введем функцию **BIS1_UGL**:

$$\mathbf{BIS1\_UGL}(a,b,c,l,m,n):=$$
$$y=-\frac{l\sqrt{a^2+b^2}-a\sqrt{l^2+m^2}}{m\sqrt{a^2+b^2}-b\sqrt{l^2+m^2}}\mathrm{X}-\frac{n\sqrt{a^2+b^2}-c\sqrt{l^2+m^2}}{m\sqrt{a^2+b^2}-b\sqrt{l^2+m^2}}$$

Аналогично получим уравнение второй биссектрисы:

$$\mathbf{BIS2\_UGL}(a,b,c,l,m,n):=$$
$$y=-\frac{l\sqrt{a^2+b^2}+a\sqrt{l^2+m^2}}{m\sqrt{a^2+b^2}+b\sqrt{l^2+m^2}}\mathrm{X}-\frac{n\sqrt{a^2+b^2}+c\sqrt{l^2+m^2}}{m\sqrt{a^2+b^2}+b\sqrt{l^2+m^2}}$$

**Пример**. Построить прямые $3x-2y+4=0$ и $2x+3y-1=0$ и биссектрисы углов между ними.

**BIS1_UGL**(3, –2, 4, 2, 3, –1) ↲ S ↲. Результат: $y = \dfrac{x}{5} + 1$.

**BIS2_UGL**(3, –2, 4, 2, 3, –1) ↲ S ↲. Результат: $y = -5x - 3$.

Постройте рисунок.

**Задача 2.** Найти биссектрисы углов между прямыми с угловыми коэффициентами $k$ и $u$, если прямые пересекаются в точке $(d; h)$.

Р е ш е н и е.

Уравнения биссектрис можно получить аналогично тому, как мы это сделали в предыдущем случае. Поступим по-другому.

1. Найдем уравнения прямых, имеющих угловой коэффициент, равный $u$, и проходящих через точку $(d; h)$, используя функцию **LINE2**. Результат: $y = kx + h - kd$ и $y = ux + h - ud$. В полученные в предыдущей задаче равенства сделаем подстановки:

**M S** $a{:} = k \quad b{:} = -1 \quad c{:} = h - kd \quad l{:} = u \quad m{:} = -1 \quad n{:} = h - ud$

Результаты обозначим соответственно через **BISS_UG1** и **BISS_UG2**

$$\mathbf{BISS\_UG1}(u,k,d,h) := y = \frac{\sqrt{u^2+1}\,k + \sqrt{k^2+1}\,u}{\sqrt{u^2+1} + \sqrt{k^2+1}}\,x - \frac{\sqrt{u^2+1}(dk-h) + \sqrt{k^2+1}(du-h)}{\sqrt{u^2+1} + \sqrt{k^2+1}}$$

$$\mathbf{BISS\_UG2}(u,k,d,h) := y = \frac{\sqrt{u^2+1}\,k - \sqrt{k^2+1}\,u}{\sqrt{u^2+1} - \sqrt{k^2+1}}\,x - \frac{\sqrt{u^2+1}(dk-h) - \sqrt{k^2+1}(du-h)}{\sqrt{u^2+1} - \sqrt{k^2+1}}$$

**П р и м е р.** Решим ту же задачу: найти биссектрису угла между прямыми с угловыми коэффициентами $k = \frac{3}{2}$, $u = -\frac{2}{3}$.

**BISS_UG1**(3/2, –2/3, –10/13, 11/13) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{x}{5} + 1$.

**BISS_UG2**(3/2, –2/3, –10/13, 11/13)↵ S ↵. Результат: $y = -5x - 3$.

Как видим, результаты совпали.

**Задача 3.** Построить биссектрису того угла между прямыми $ax + by + c = 0$ и $lx + my + n = 0$, внутри которого лежит точка $M(r; s)$.

Р е ш е н и е.

*1-й способ.*

Построить прямые, найти обе биссектрисы углов между прямыми, построить их, установить указатель «+» в точку $(r, s)$ и выбрать нужную биссектрису, другую удалить.

*2-й способ.*

Из хода наших рассуждений при выводе уравнений биссектрис следует, что если выражения $ax + by + c$ и $lx + my + n$ имеют одинаковые знаки, то надо использовать функцию **BIS1_UGL**, иначе — функцию **BIS2_UGL**

Введем функцию-тест.

$$\boxed{\textbf{TEST1\_BIS}(a,b,c,l,m,n,r,s) := (ar + bs + c)(lr + ms + n)}$$

Если результат обращения к этой функции меньше нуля, надо использовать функцию **BIS2_UGL**, иначе — функцию **BIS1_UGL**.

**П р и м е р.** Построить биссектрису того угла между прямыми $5x + 8y - 7 = 0$ и $9x - 4y + 16 = 0$, внутри которого лежит: а) начало координат, б) точка (10; –2).

Р е ш е н и е.

а) **TEST1_BIS**(5, 8, –7, 9, –4, 16, 0, 0) ↵ S ↵

Результат: $-112<0 \Rightarrow$ надо использовать функцию **BIS2_UGL**.

**BIS2_UGL**(5, 8, –7, 9, –4, 16, 0, 0) ↵ S ↵ X ↵

Результат: $y = -3.267x - 1.997$.

б) **TEST1_BIS**(5, 8, –7, 9, –4, 16, 10, –2) ↵ S ↵
Результат >0 ⇒ надо использовать функцию **BIS1_UGL**.

**BIS1_UGL**(5, 8, –7, 9, –4, 16, 10, –2) ↵ S ↵ X ↵

Результат: $y = 0.306x + 1.887$.
Постройте рисунок.

Переформулируем последнюю задачу: построить биссектрису угла между прямыми с угловыми коэффициентами –5/8 и 9/4, пересекающимися в точке $\left(-\frac{25}{23};\frac{143}{92}\right)$, внутри которого лежит: а) начало координат, б) точка (10; –2).

Решение.
Введем функцию-тест

$$\mathbf{TEST\_BISS2}(u,k,d,h,r,s) := -(kr + h - kd - s)(ur + h - ud - s)$$

Если результат меньше нуля, надо использовать функцию **BISS_UG2**, иначе — функцию **BISS_UG1**.

**TEST_BISS2**(–5/8, 9/4, –25/23, 143/92, 0, 0) ↵ S ↵.

Результат меньше 0 .

**BISS_UG2**(–5/8, 9/4, –25/23, 143/92, 0, 0) ↵ S ↵ X ↵.

Результат: $y = 3.267x - 1.997$.
Второй случай рассмотрите самостоятельно.

**Пример**. Найти биссектрису первого координатного угла.

Решение.
Уравнение оси ординат $x = 0$ или $x + 0y + 0 = 0$ . Уравнение оси абсцисс $0x + y + 0 = 0$. Точка (1; 1) лежит в первом координатном углу.

**TEST1_BIS**(1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1) ↵ S ↵. Результат больше нуля.

**BIS1_UGL**(1, 0, 0, 0, 1, 0) ↵ S ↵. Результат: $y = x$ .

**Задача 4.** Пусть требуется составить задачу: даны две прямые и точка, не лежащая на этих прямых. Требуется построить точку, симметричную относительно данной точки биссектрисы того угла между прямыми, в котором лежит данная точка.

Решение.

Подберем «удобные» данные задачи.

Будем решать задачу в обратном порядке.

1. Возьмем, например, точку (4; 5), через нее проведем некоторую прямую, пусть она должна быть биссектрисой угла между искомыми прямыми. Пусть, например, угловой коэффициент этой биссектрисы равен 1, тогда ее уравнение $y = x + 1$. Его легко вычислить устно, в общем случае можно воспользоваться функцией **LINE2**. Здесь

**LINE2**(1, 4, 5) ↵ S ↵. Результат: $y = x + 1$.

2. Пусть тангенс угла между прямыми, которые должны быть заданы, и биссектрисой равен $\frac{1}{3}$. Тогда можно найти уравнения этих прямых, используя функцию **LL_UG**.

**LL_UG**(1, 1/3, 4, 5) ↵ S ↵. Результат: $y = 2x - 3$.

**LL_UG**(1, –1/3, 4, 5) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{x}{2} + 3$.

Постройте все три прямые и зрительно убедитесь в правдоподобности результатов вычислений.

3. Подберем точку, которая будет дана в условии составляемой задачи, с «удобными» координатами. Возьмем, например, точку (–8; –3). Установите ее (moVe) и убедитесь, что она не лежит на данных прямых. Можно поступить и так: передвигайте указатель «+» по рисунку и следите за ее координатами. Выберите точку, расположенную не слишком близко от точки пересечения прямых (конечно, это зависит от выбранного масштаба).

Итак, можно сформулировать **задачу**. Найти точку, симметричную точке (–8; –3) относительно биссектрисы того угла между прямыми $y = 2x - 3$ и $y = \frac{x}{2} + 3$, в котором лежит данная точка.

Решим эту задачу.

1. При помощи функции **TEST1_BIS** определим, какой из функций — BIS1_UGL или **BIS2_UGL** надо воспользоваться при нахождении биссектрисы.

**TEST1_BIS** $\left(2,-1,-3,\frac{1}{2},-1,3,-8,-3\right)$ ↵ S ↵. Результат: <0, следовательно, надо воспользоваться функцией **BIS2_UGL**.

2. **BIS2_UGL** $\left(2,-1,-3,\frac{1}{2},-1,3\right)$ ↵ S ↵. Результат: $y = x + 1$.

3. Найдем координаты точки, симметричной точке (–8; –3) относительно найденной прямой $y = x + 1$.

**TOCH_SIM** $(-8,-3,1,-1,1)$ ↵ S ↵. Результат: [– 4, –7].

**Задача 5.** Определить уравнение биссектрисы угла между прямыми, пересекающимися в точке ($d$; $h$), если угловой коэффициент одной из них равен $k$ и тангенс угла между этими прямыми равен $u$.

Решение.

Воспользуемся функцией **L_UG**. При ее вызове надо заменить $u$ на $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, где $\alpha = \operatorname{arctg} u$.

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{u^2+1}-1}{u}$, поэтому $u$ надо заменить найденной дробью.

Введем функцию

$$\boxed{\mathbf{BIS\_UGD}(u,k,d,h) := \mathbf{L\_UG}\left(\frac{\sqrt{u^2+1}-1}{u},k,d,h\right)}$$

**Пример.** Пусть надо найти уравнения биссектрис углов, составленных прямыми, проходящими через точку (4; 5), если угловой коэффициент одной из них равен 1, а тангенс угла между этими прямыми равен 1/2.

Решение.

1. Найдем уравнение одной из биссектрис.

**BIS_UGD**(1/2, 1, 4, 5) ↵ S ↵.

Результат: $y = x\left[\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right]-2\sqrt{5}+3$. (1)

Это уравнение биссектрисы острого угла между прямыми.

2. Найдем уравнение биссектрисы тупого угла между прямыми, то есть уравнение биссектрисы, перпендикулярной найденной биссектрисе.

**LN_PERV2**$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2},4,5\right)$ ↵ S ↵.

Результат: $y = x\left[\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right]+2\sqrt{5}+3$. (2)

Проверка.

1. Найдем уравнение первой из прямых.

**LINE2**(1, 4, 5) ↵ S ↵. Результат: $y = x + 1$. (3)

2. Уравнение второй прямой:

**L_UG**(1/2, 1, 4, 5) ↵ S ↵. Результат: $y = 3x - 7$. (4)

3. Найдем тангенсы углов между прямыми (1), (3) и (1), (4).

**TG_UGPR**$\left(1,\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)$ ↵ S ↵. Результат: $\sqrt{5}-2$.

**TG_UGPR**$\left(3,\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right)$ ↵ S ↵. Результат: $\sqrt{5}-2$.

Они совпали, что и требовалось доказать.

До сих пор мы отсчитывали углы от прямой $y = x + 1$ в положительном направлении, то есть против часовой стрелки. Будем теперь отсчитывать его в отрицательном направлении.

1. Найдем уравнение биссектрисы острых углов:

**BIS_UGD**(–1/2, 1, 4, 5) ↵ S ↵.

Результат: $y = x\left[\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right]-2\sqrt{5}+7$. (5)

2. Найдем уравнение второй биссектрисы — тупых углов.

**LN_PERV2**$\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2},4,5\right)$ ↵ S ↵.

Результат: $y=-x\left[\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{2}\right]+2\sqrt{5}+7$. (6)

Проверка.

1. **L_UG**(–1/2, 1, 4, 5) ↵ S ↵. Результат: $y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{11}{3}$. (7)

3. Найдем тангенсы углов между прямыми (1), (5) и (5), (7).

**TG_UGPR**$\left(1,\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)$ ↵ S ↵. Результат: $\sqrt{5}-2$.

**TG_UGPR**$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)$ ↵ S ↵. Результат: $\sqrt{5}-2$.

Что и требовалось доказать.

Найдем углы между найденными биссектрисами острых и тупых углов попарно. Они должны быть равны 1/2.

**TG_UGPR**$\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)$ ↵ S ↵. Результат: $\dfrac{1}{2}$.

**TG_UGPR**$\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)$ ↵ S ↵. Результат: $\dfrac{1}{2}$.

Заметим, что

**BIS_UGD**$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{2},4,5\right)$ ↵ S ↵. Результат: $y=3x-7$.

**BIS_UGD**$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2},4,5\right)$ ↵ S ↵. Результат: $y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{11}{3}$.

Получили уравнения прямых, для которых искали уравнения биссектрис углов между ними, как и ожидалось.

Постройте все прямые и зрительно убедитесь в правдоподобности полученных результатов.

## Треугольники и окружности

**Задача 1.** Даны вершины треугольника $A(4; 7)$, $B(-5; 2)$, $C(-1; -8)$. Построить треугольник и описанную около него окружность.

Р е ш е н и е.

Центр описанной окружности лежит на пересечении перпендикуляров, проведенных к серединам сторон треугольника.

1. Найдем уравнение стороны $AB$:

**LINE**(4, 7, –5, 2) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{5x}{9} + \frac{43}{9}$.

2. Координаты центра середины отрезка $AB$:

**C_OTR**(4, 7, –5, 2) ↵ S ↵. Результат: $\left[-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right]$.

3. Уравнение прямой, перпендикулярной к $AB$ и проходящей через точку $(-1/2; 9/2)$:

**LN_PER**(–1/2, 9/2, 5/9, –1) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{18}{5} - \frac{9x}{5}$.

4. Прямая $AC$:

**LINE**(4, 7, –1, –8) ↵ S ↵. Результат: $y = 3x - 5$.

5. Координаты центра отрезка $AC$:

**C_OTR**(4, 7, –1, –8) ↵ S ↵. Результат: $\left[\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$.

6. Уравнение прямой, перпендикулярной к $AC$ и проходящей через точку $(3/2, -1/2)$:

**LN_PER**(3/2, –1/2, 3, –1) ↵ S ↵. Результат: $y = -\frac{x}{3}$.

7. Найдем точку пересечения полученных срединных перпендикуляров — координаты центра описанной окружности:

$\left[y = \frac{18}{5} - \frac{9x}{5}, y = -\frac{x}{3}\right]$ ↵ L ↵. Результат: $\left[x = \frac{27}{11}, y = -\frac{9}{11}\right]$.

8. Найдем радиус окружности — расстояние от центра до любой из вершин треугольника:

**RASST**(27/11, –9/11, 4, 7) ↲ S ↲. Результат: $\frac{\sqrt{7685}}{11}$ .

9. Введите параметрическое задание окружности:

$$\left[\frac{27}{11}+\frac{\sqrt{7685}}{11}\cos t,-\frac{9}{11}+\frac{\sqrt{7685}}{11}\sin t\right].$$

10. Для построения треугольника найдем уравнение его третьей стороны $BC$:

**LINE**(–5, 2, –1, –8) ↲ S ↲. Результат: $y=-\frac{5x}{2}-\frac{21}{2}$.

Постройте рисунок: треугольник и описанную окружность.

**Задача 2.** Сторона $AC$ треугольника $ABC$ лежит на прямой $3x+2y-5=0$, известны координаты вершины $A$: $A(-3;\ 7)$. Точка $P(5;\ 7)$ — центр описанной вокруг треугольника окружности. Точка $K$ — точка пересечения прямой $AP$ со стороной треугольника $BC$. Длина отрезка $AK$ равна 6. Построить треугольник и описанную около него окружность.

Решение.

*1-й способ.*

1. Найдем радиус описанной окружности — это длина отрезка $AP$:

**RASST**(–3, 7, 5, 7) ↲ S ↲. Результат: 8 .

2. Введем уравнение окружности $(x-5)^2+(y-7)^2=64$.

3. Найдем абсциссы точек пересечения прямой $AC$ и окружности, для этого в уравнение окружности подставим $y=-\frac{3x}{2}+\frac{5}{2}$ и решим полученное уравнение:

M S $y{:}=-\frac{3x}{2}+\frac{5}{2}$ ↲ L ↲. Результат: $x=-3,\ \ x=\frac{25}{13}$ .

Так как точка $A$ имеет абсциссу, равную –3, точка $C$ имеет абсциссу 25/13.

4. Найдем ординату точки $C$: в уравнение $3x + 2y - 5 = 0$ подставим $x = 25/13$ и решим полученное уравнение:

M S ↵ $x := \frac{25}{13}$ ↵ L ↵. Результат: $y = -\frac{5}{13}$.

Координаты точки $C$ можно найти также следующим образом.

*2-й способ.*

1. Найдем проекцию центра окружности $P$ на данную прямую.

**T_PER**(5, 7, 3, 2, –5) ↵ S ↵. Результат: $\left[-\frac{7}{13}, \frac{43}{13}\right]$.

Обозначим полученную точку через $L$.

2. Воспользуемся тем, что точка $C$ симметрична точке $A$ относительно точки $L$:

**ANC**(–3, 7, –7/13, 43/13) ↵ S ↵. Результат: $\left[\frac{25}{13}, -\frac{5}{13}\right]$.

Выполните пункты 3(1) и 4(1).

5. Точки $A$ и $P$ лежат на прямой $y = 7$, следовательно, уравнение прямой $AP$, а значит и прямой $AK$, $y = 7$. Конечно, можно воспользоваться функцией **LINE**.

6. Так как точка $K$ удалена от точки $A$ на 6 единиц и она лежит на прямой $y = 7$, то точка $K$ имеет координаты (3; 7). Для нахождения этих координат можно воспользоваться также функцией **TOCH2_R**: точка $K$ удалена от точки $A$ на 6 единиц; так как абсцисса точки $P$ больше абсциссы точки $A$, то абсцисса точки $K$ больше абсциссы точки $A$, следовательно, надо воспользоваться функцией **TOCH2_R**.

**TOCH2_R**(6, –3, 0, 1, –7) ↵ S ↵. Результат: [3,7].

7. Уравнение прямой $CK$ и, следовательно, $BC$

**LINE**(25/13, –5/13, 3, 7) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{48\,x}{7} - \frac{95}{7}$.

8. Найдем координаты точки $B$. Для этого в уравнение окружности вместо $y$ подставим $\frac{48\,x}{7} - \frac{95}{7}$.

M S $y := \frac{48\,x}{7} - \frac{95}{7}$ ↲ L ↲. Результат: $x = \frac{25}{13}$, $x = \frac{753}{181}$.

$\frac{25}{13}$ — абсцисса точки $C$, следовательно, $\frac{753}{181}$ — абсцисса точки $B$.

В уравнение прямой $y = \frac{48x}{7} - \frac{95}{7}$ подставим $x = \frac{753}{181}$, результат: $y = \frac{2707}{181}$.

9. Найдите уравнения прямых $AB$ и $AC$.

Результат: $y = \frac{10\,x}{9} + \frac{31}{3}$ и $y = \frac{5}{2} - \frac{3x}{2}$.

Сделайте чертеж.

Постройте треугольник: отрезки $\left[x, \frac{10x}{9} + \frac{31}{3}\right]$ при $x \in \left[-3, \frac{753}{181}\right]$, $\left[x, \frac{5}{2} - \frac{3x}{2}\right]$ при $\left[-3, \frac{25}{13}\right]$, $\left[x, \frac{48x}{7} - \frac{95}{7}\right]$ при $x \in \left[\frac{753}{181}, \frac{25}{13}\right]$. Постройте окружность $[5 + 8\cos t,\ \ 7 + 8\sin t]$. Зрительно убедитесь в правильности полученных результатов.

**Задача 3.** Решите аналогичную задачу, если сторона треугольника $AC$ лежит на прямой $3x + 2y - 5 = 0$, $A\left(-2; \frac{11}{2}\right)$, $P(1;5)$.

**Задача 4**. Даны вершины треугольника: $A(-15; -10)$, $B(21; 5)$, $C(13, 11)$. Построить все его биссектрисы и вписать в треугольник окружность.

Решение.

Построим биссектрисы треугольника. Воспользуемся тем, что центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис углов треугольника.

1. Найдем уравнение стороны $AB$ треугольника:

**LINE**(–15, –10, 21, 5) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{5x}{12} - \frac{15}{4}$.

2. Уравнение стороны $AC$:

**LINE**(–15, –10, 13, 11) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{3x}{4} + \frac{5}{4}$.

3. Уравнение стороны $BC$:

**LINE**(21, 5, 13, 11) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{83}{4} - \frac{3x}{4}$.

4. Найдем уравнение биссектрисы угла $A$, то есть угла между прямыми $AB$ и $AC$. Прежде определим, какой из функций **BISS_UG** надо воспользоваться. Можно найти уравнения обеих биссектрис, построить их и выбрать ту, которая является биссектрисой угла треугольника. Или надо выбрать любую точку, лежащую внутри треугольника, и определить, какую из функций выбрать, используя тест **TEST_BISS2**.

Точка (0; 0) лежит внутри треугольника, воспользуемся тестом:

**TEST1_BIS**(5/12, –1, –15/4, 3/4, –1, 5/4, 0, 0) ↲ S ↲.

Результат <0.

Следовательно, надо воспользоваться функцией **BISS2_UGL**.

**BIS2_UGL**(5/12, –1, –15/4, 3/4, –1, 5/4, 0, 0) ↲ S ↲.

Результат: $y = \frac{4x}{7} - \frac{10}{7}$.

Можно также воспользоваться функцией **BISS_UG1**.

**BISS_UG1**(5/12, 3/4, –15, –10) ↵ S ↵. Результат тот же.

5. Найдите уравнение биссектрисы угла *B*, то есть уравнение биссектрисы угла между прямыми *AB* и *BC*. Результат: $y = \frac{61}{8} - \frac{x}{8}$.

6. Воспользуемся тем, что центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис углов треугольника.

$\left[y = \frac{4x}{7} - \frac{10}{7}, y = \frac{61}{8}\right]$ ↵ S ↵. Результат: [13, 6].

Это координаты центра описанной окружности: *O*(13; 6).

7. Расстояние от точки *O* до любой из сторон треугольника — радиус вписанной окружности. Найдем, например, расстояние до прямой *AB*:

**RASS2**(13, 6, 5/12, –1, –15/4) ↵ S ↵. Результат: 4.

8. Введем параметрическое задание окружности:

$$[13 + 4\cos t, 6 + 4\sin t].$$

9. Для проверки найдем координаты точки касания найденной окружности со стороной *AB*:

**T_PER**(13, 6, 5/12, –1, –15/4) ↵ S ↵. Результат: $\left[\frac{189}{13}, \frac{30}{13}\right]$.

Постройте треугольник и окружность (рис. 13). Установите указатель «+» в найденную точку касания. Найдите координаты точек касания окружности с остальными точками касания и установите «+» в эти точки. Зрительно убедитесь в правильности вычислений.

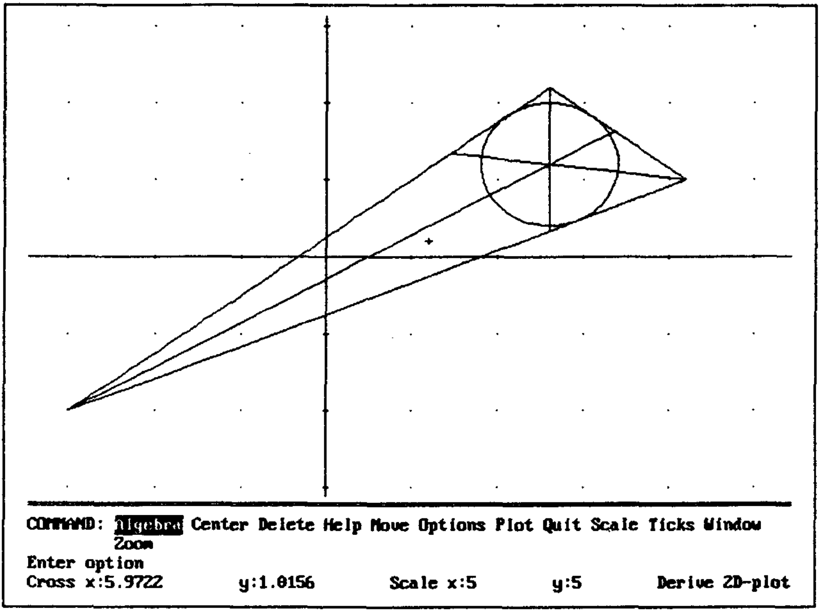



Рис. 13

**Задача 5.** В равнобедренном прямоугольном треугольнике $ABC$ даны вершина острого угла $A(d; h)$ и уравнение противолежащего катета $ax + by + c = 0$. Найти координаты двух других вершин этого треугольника.

Решение.

1. Найдем координаты вершины прямого угла треугольника — вершины $B$, воспользовавшись тем, что точка $B$ — проекция точки $A$ на данную прямую.

**T_PER(*d*)** ↲ S ↲

Заметьте, что так как все параметры в формуле носят тот же смысл, что и в данной задаче, достаточно ввести только первую из переменных, но хотя бы одну из них указать надо.

2. Найдем расстояние от точки $A$ до данной прямой — это длина катета треугольника:

**RASS2(*d*)** ↲ S ↲

В этом случае функция **RASS2** удобнее функции **RASST**, так как если использовать функцию **RASST**, придется ввести значения всех параметров, входящих в нее.

3. Для нахождения координат вершины $C$ воспользуйтесь функциями **TOCH1_R** и **TOCH2_R** — очевидно, задача имеет два решения.

4. Для найденных выражений введите функции, например, **VER1_TR**($d$, $h$, $a$, $b$, $c$) и **VER2_TR**($d$, $h$, $a$, $b$, $c$).

$$\mathbf{VER1\_TR}(d,h,a,b,c):=$$
$$\left[-\frac{b(ad+bh+c)+a(bh+c)-b^2h}{a^2+b^2},\ \frac{a(ad+bh+c)+a^2h-abd-bc}{a^2+b^2}\right]$$

$$\mathbf{VER2\_TR}(d,h,a,b,c):=$$
$$\left[\frac{b(ad+bh+c)-a(bh+c)+b^2h}{a^2+b^2},\ \frac{-a(ad+bh+c)+a^2h-abd-bc}{a^2+b^2}\right]$$

**Пример**. Пусть дана вершина прямоугольного треугольника $A(-1, 8)$, $3x - 2y + 4 = 0$ – уравнение прямой, на которой лежит катет $BC$. Найдем координаты точек $B$, $C_1$, $C_2$.

Решение.

**T_PER**(–1, 8, 3, –2, 4) ↵ S ↵. Результат: $\left[\frac{32}{13}, \frac{74}{13}\right]$.

**VER1_TR**(–1, 8, 3, –2, 4) ↵ S ↵. Результат: $\left[\frac{2}{13}, \frac{29}{13}\right]$.

**VER2_TR**(–1, 8, 3, –2, 4) ↵ S ↵. Результат: $\left[\frac{62}{13}, \frac{119}{13}\right]$.

Найдите уравнения сторон треугольников, сделайте рисунок.

Проверьте результаты: например, найдите длины гипотенуз треугольников.

Ответы: уравнение прямой $AB$ $y=\frac{22}{3}-\frac{2x}{3}$, уравнение прямой $AC_2$ $y=\frac{x}{5}+\frac{41}{5}$, уравнение прямой $AC_1$ $y=3-5x$.

Возьмите другие данные и решите полученную задачу.

**Задача 6.** Даны две вершины равнобедренного прямоугольного треугольника $A(3;\ 1)$ и $B(7;\ 4)$, $AB$ — гипотенуза. Построить треугольник и описать около него окружность.

Решение.

Очевидно, существуют два треугольника, удовлетворяющих поставленным условиям.

1. Найдем уравнение стороны $AB$.

**LINE**(3, 1, 7, 4) ↵ S ↵. Результат: $y=\frac{3x}{4}-\frac{5}{4}$.

2. Треугольник $ABC$ — прямоугольный, следовательно, углы при вершинах $A$ и $B$ равны 45°, tg 45° = 1. Воспользуемся функцией **L_UG** для нахождения сторон $AC_1$, $BC_1$, $AC_2$, $BC_2$.

Уравнение стороны $AC_1$: **L_UG** (1, 3/4, 3, 1) ↵ S ↵.
Результат: $y=7x-20$.

Стороны $BC_1$: **L_UG**(–1, 3/4, 7, 4) ↵ S ↵.

Результат: $y=5-\frac{x}{7}$.

Стороны $AC_2$: **L_UG**(–1, 3/4, 3, 1) ↵ S ↵.

Результат: $y=\frac{10}{7}-\frac{x}{7}$.

Стороны $BC_2$: **L_UG**(1, 3/4, 7, 4) ↵ S ↵.

Результат: $y=7x-45$.

3. Центр описанной окружности лежит в середине гипотенузы. Найдем его координаты.

**C_OTR**(3, 1, 7, 4) ↵ S ↵. Результат: $\left[5,\frac{5}{2}\right]$.

4. Найдите радиус окружности. Результат: 5/2 .

Постройте треугольники и окружность $\left[5+\frac{5}{2}\cos t, \frac{5}{2}+\frac{5}{2}\sin t\right]$. Зрительно убедитесь в правильности полученных результатов.

**Задача 7.** Построить треугольник $ABC$, если известны его вершины $A(2;\ 1)$, $B(8;\ 4)$, угол при вершине $A$ равен 30°, при вершине $B$ равен 60°. Построить описанную около него окружность и вписать в него окружность.

Решение.

Очевидно, существуют два треугольника, удовлетворяющих поставленным условиям. Эти треугольники прямоугольные.

Решение задачи аналогично предыдущему.

1. $AB$: **LINE**(2, 1, 8, 4) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{x}{2}$.

2. $AC_1$ : **L_UG** $(1/\sqrt{3},\ 1/2,\ 2,\ 1)$ ↵ S ↵.

Результат: $y = x\left[\frac{5\sqrt{3}}{11}+\frac{8}{11}\right]-\frac{10\sqrt{3}}{11}-\frac{5}{11}$.

3. $BC_1$ : **L_UG** $(-\sqrt{3},\ 1/2,\ 8,\ 4)$ ↵ S ↵

Результат: $y = x(8-5\sqrt{3})+40\sqrt{3}-60$.

Найдем произведение угловых коэффициентов полученных прямых. Оно равно –1, следовательно, прямые перпендикулярны, как и должно быть.

Впишем окружность в полученный треугольник. Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис углов треугольника. Биссектрисы углов можно найти с помощью функций **BIS1_UGL** и **BIS2_UGL**. В данной задаче для этого можно воспользоваться также функцией **L_UG**, так как углы при вершинах $B$ и $C_1$ «удобные».

4. Найдем биссектрису прямого угла — угла при вершине $C_1$.

**BIS1_UGL** $\left(8-5\sqrt{3},-1{,}40\sqrt{3}-60,\frac{5\sqrt{3}}{11}+\frac{8}{11},-1,-\frac{10\sqrt{3}}{11}-\frac{5}{11}\right)$ ↵S ↵.

Результат: $y=x\left[-\frac{5\sqrt{3}}{3}-2\right]+\frac{65\sqrt{3}}{6}+\frac{25}{2}$.

Этот же результат можно получить так:

**L_UG** $\left(1,\frac{5\sqrt{3}}{11}+\frac{8}{11},\frac{13}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4},\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{13}{4}\right)$ ↵ S ↵.

5. Найдем биссектрису угла $B$:

**L_UG** $(1/\sqrt{3},\ 8-5\sqrt{3},\ 8,\ 4)$ ↵ S ↵.

Найдите эту биссектрису вторым способом самостоятельно.

6. Найдите точку пересечения этих биссектрис.

Результат: $\left[\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{17}{4},\frac{9\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}\right]$.

7. Найдите расстояние от этой точки до любой из сторон треугольника — это радиус вписанной окружности.

Постройте треугольник и окружность.

Построим второй треугольник.

8. $AC_2$ : **L_UG** $(-1/\sqrt{3},\ 1/2,\ 2,\ 1)$ ↵ S ↵.

9. $BC_2$ : **L_UG** $(\sqrt{3},1/2,8,4)$ ↵ S ↵.

Продолжите решение задачи самостоятельно.

10. Параметрическое задание второй вписанной окружности

$$\left[\frac{9\sqrt{3}}{4}+\frac{11}{4}+\left[\frac{3\sqrt{15}}{4}-\frac{3\sqrt{5}}{4}\right]\cos t,\frac{13}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}+\left[\frac{3\sqrt{15}}{4}-\frac{3\sqrt{5}}{4}\right]\sin t\right].$$

Достройте чертеж: второй треугольник, вписанную в него окружность, описанную окружность.

**Задача 8**. Две вершины равностороннего треугольника находятся в точках $A(1; 0)$ и $B(2; \sqrt{3})$. Построить треугольник.

Решение.

Очевидно, можно построить два треугольника, удовлетворяющих поставленным условиям.

*1-й способ.*

Эту задачу можно решить аналогично двум предыдущим задачам, используя то, что углы треугольника равны 60°. Сделайте это самостоятельно.

*2-й способ.*

Найдем длину отрезка $AB$, высоту треугольника $h$ и воспользуемся тем, что вершина $C$ треугольника удалена от стороны $AB$ на $h$ единиц и расположена симметрично середине отрезка $AB$.

1. $AB$: **LINE** $(1,\ 0{,}2,\ \sqrt{3})$ ↵ S ↵. Результат: $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$.

2. **RASST** $(1,\ 0{,}2,\ \sqrt{3})$ ↵ S ↵. Результат: 2.

3. **C_OTR** $(1,\ 0{,}2,\ \sqrt{3})$ ↵ S ↵. Результат: $\left[\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

4. **TOCH_R1** $(\sqrt{3},\ 3/2,\ \sqrt{3},\ -1,\ -\sqrt{3})$ ↵ S ↵.

Результат: $\left[0,\ \sqrt{3}\right]$.

5. **TOCH_R2** $(\sqrt{3},\ 3/2,\ \sqrt{3},\ -1,\ -\sqrt{3})$ ↵ S ↵.

Результат: $[3, 0]$.

Мы нашли точки $C_1(0; \sqrt{3})$ и $C_2(3; 0)$. Закончите решение задачи самостоятельно, постройте чертеж.

**Задача 9.** Известны вершины треугольника $A(-2; 17/3)$ и $B(9; 13)$, точка $L(5, 55/6)$ — точка пересечения биссектрис треугольника. Построить треугольник и вписать в него окружность.

Р е ш е н и е.

1. Найдем уравнение стороны $AB$:

**LINE**(–2, 17/3, 9, 13) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{2x}{3} + 7$.

2. Уравнение прямой $AL$ — биссектрисы угла $A$:

**LINE**(–2, 17/3, 5, 55/6) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{x}{2} + \frac{20}{3}$.

3. Тангенс угла между стороной $AB$ и биссектрисой угла $A$:

**TG_UGPR**(2/3, 1/2) ↵ S ↵. Результат: 1/8.

4. Уравнение стороны $AC$:

**L_UG**(1/2, –1/8, –2, 17/3) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{6x}{17} + \frac{325}{51}$.

5. Уравнение прямой $BL$ — биссектрисы угла $B$:

**LINE**(5, 55/6, 9, 13) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{23x}{24} + \frac{35}{8}$.

6. Тангенс угла между стороной $AB$ и биссектрисой угла $B$:

**TG_UGPR**(23/24, 2/3) ↵ S ↵. Результат: 21/118.

7. Уравнение прямой $BC$:

**L_UG**(21/118, 23/24, 9, 13) ↵ S ↵.

Результат: $y = \frac{3218\,x}{2349} + \frac{175}{261}$.

8. Расстояние между точкой $L$ и прямой $AB$ — радиус вписанной окружности:

**RASS2**(5, 55/6, 2/3, –1, 7) ↵ S ↵. Результат: $\frac{7\sqrt{13}}{26}$.

9. Введем параметрическое задание вписанной окружности.

$$\left[5 + \frac{7\sqrt{13}}{26}\cos t, \frac{55}{6} + \frac{7\sqrt{13}}{26}\sin t\right].$$

Для построения чертежа найдите координаты точки $B$.

Постройте окружность, установите «+» в точку касания, определите ее координаты. Найдите координаты этой точки аналитически. Проделайте это со всеми точками касания.

## Многоугольники

**Задача 1.** Даны вершины четырехугольника $A(5;8)$, $B(10;3)$, $C(-4,-2)$, $D(0,-6)$. Построить этот четырехугольник и описанную около него окружность, если она существует.

Решение.

Найдем точку пересечения срединных перпендикуляров к отрезкам $AB$ и $AC$, а затем расстояния от нее до точек $A$ и $D$. Если эти расстояния равны, описанная окружность существует.

1. Найдем уравнение стороны $AB$:

**LINE**(5, 8, 10, 3) ↵ S ↵. Результат: $y = 13 - x$.

2. Середина отрезка $AB$:

**C_OTR**(5, 8, 10, 3) ↵ S ↵. Результат: $\left[\frac{15}{2}, \frac{11}{2}\right]$.

3. Уравнение срединного перпендикуляра к отрезку $AB$:

**LN_PER**(15/2, 11/2, 1, 1) ↵ S ↵. Результат: $y = x - 2$.

Аналогично найдем уравнение срединного перпендикуляра к отрезку $AC$ (пункты 4 – 6). Результат: $y = \frac{69}{20} - \frac{9x}{10}$.

7. Найдем точку пересечения найденных прямых.

$\left[y = x - 2, y = \frac{69}{20} - \frac{9x}{10}\right]$ ↵ L ↵. Результат: $\left[\frac{109}{38}, \frac{33}{38}\right]$.

8. Найдем расстояние между найденной точкой и точкой $A$.

**RASST**$\left(5, 8, \frac{109}{38}, \frac{33}{38}\right)$ ↵ S ↵. Результат: $\frac{\sqrt{80002}}{38}$.

9. Найдем расстояние между найденной точкой и точкой $D$.

**RASST**$\left(0, -6, \frac{109}{38}, \frac{33}{38}\right)$ ↵ S ↵. Результат: $\frac{\sqrt{80002}}{38}$.

Найденные расстояния совпадают, следовательно, описанная окружность существует.

10. Зададим окружность параметрически:

$$\left[\frac{109}{38}+\frac{\sqrt{80002}}{38}\cos t, \frac{33}{38}+\frac{\sqrt{80002}}{38}\sin t\right]$$

Постройте рисунок.

**Задача 2.** Точки $A(3;\ 7)$ и $B(10;\ -2)$ — две смежные вершины параллелограмма, $M(-1;\ -2)$ — точка пересечения его диагоналей. Построить параллелограмм.

Решение.

Вершина параллелограмма $C$ симметрична вершине $A$ относительно точки $M$, следовательно, для нахождения координат точки $C$ можно воспользоваться функцией **ANC**. Аналогично найдем координаты точки $B$.

1. Найдем координаты точки $C$:

**ANC**(3, 7, –1, –2) ↲ S ↲. Результат: [–5, –11].

2. Координаты точки $D$:

**ANC**(10, –2, –1, –2) ↲ S ↲. Результат: [–12, –2].

Все вершины известны. Закончите решение задачи самостоятельно.

**Задача 3.** Точки $M(-3;\ 2)$ и $N(7;\ -6)$ — вершины противоположных углов ромба. Составить уравнения диагоналей ромба. Построить несколько ромбов, удовлетворяющих поставленным условиям.

Решение.

Воспользуемся тем, что диагонали ромба перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам.

1. Найдем уравнение диагонали $MN$:

**LINE**(–3, 2, 7, –6) ↲ S ↲. Результат: $y=-\frac{4x}{5}-\frac{2}{5}$ . (1)

2. Центр отрезка $MN$:

**C_OTR**(–3, 2, 7, –6) ↲ S ↲. Результат: [2, –2].

3. Уравнение второй диагонали:

**LN_PER**(2, –2, –4/5, –1) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{5x}{4} - \frac{9}{2}$. (2)

Построим произвольный ромб с вершинами в точках $M$ и $N$.

4. В (2) подставим любое значение $x$, например, $x := 3$, получим координаты третьей вершины ромба $A(3; -3/4)$.

5. Найдем координаты вершины, противоположной вершине $A$.

Воспользуемся тем, что она симметрична точке $A$ относительно точки (2; –2):

**ANC**(3, –3/4, 2, –2) ↲ S ↲. Результат: $\left[1, -\frac{13}{4}\right]$.

6. Уравнения сторон ромба:

*MA*: **LINE**(–3, 2, 3, –3/4) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{5}{8} - \frac{11x}{24}$.

*MB*: **LINE**(–3, 2, 1, –13/4) ↲ S ↲. Результат: $y = -\frac{21x}{16} - \frac{31}{16}$.

*NA*: **LINE**(7, –6, 3, –3/4) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{51}{16} - \frac{21x}{16}$.

*NB*: **LINE**(7, –6, 1, –13/4) ↲ S ↲. Результат: $y = -\frac{11x}{24} - \frac{67}{24}$.

Постройте рисунок. Повторите вычисления с другим значением $x$.

**Задача 4.** Диагональ ромба лежит на прямой $3x - 2y - 7 = 0$, вершины ромба $A(-1; -5)$ и $B(1; 2)$. Построить ромб.

Р е ш е н и е.

*1-й способ.*

1(1). Проверим, лежат ли данные точки на данной диагонали.

Точка $A$ принадлежит диагонали, точка $B$ — нет.

2(1). Воспользуемся тем, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны. Вторая диагональ проходит через вершину $B$:

**LN_PER**(1, 2, 3, –2) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{8}{3} - \frac{2x}{3}$.

3(1). Найдем точку пересечения диагоналей — точку $P$:

$\left[3x - 2y - 7 = 0, y = \frac{8}{3} - \frac{2x}{3}\right]$ ↵ L ↵. Результат: $\left[\frac{37}{13}, \frac{10}{13}\right]$.

4(1). Вершина ромба $D$ симметрична вершине $B$ относительно точки пересечения диагоналей. Найдем координаты точки $D$:

**ANC**(1, 2, 37/13, 10/13) ↵ S ↵. Результат: $\left[\frac{61}{13}, -\frac{6}{13}\right]$.

5(1). Уравнение стороны ромба $AB$:

**LINE**(–1, –5, 1, 2) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{7x}{2} - \frac{3}{2}$.

6(1). Прямая $CD$ параллельна прямой $AB$, координаты точки $D$ известны, следовательно, можем найти уравнение прямой $CD$:

**LN_PAR**(61/13, –6/13, 7/2, –1) ↵ S ↵.

Результат: $y = \frac{7x}{2} - \frac{439}{26}$.

7(1). Координаты точек $A$ и $D$ известны, уравнение прямой $AD$:

**LINE**(–1, –5, 61/13, –6/13) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{59x}{74} - \frac{311}{74}$.

8(1). Сторона $BC$ параллельна стороне $AD$, координаты точки $B$ известны. Уравнение прямой $BC$:

**LN_PAR**(1, 2, 59/74, –1) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{59x}{74} + \frac{89}{74}$.

9(1). Для построения ромба найдем координаты вершины С:

$\left[3x-2y-7=0, y=\frac{59x}{74}+\frac{89}{74}\right]$ ↲ L ↲. Результат: $\left[\frac{87}{13}, \frac{85}{13}\right]$.

*2-й способ.*

Выполним пункты 1(1), 2(1), 3(1), 4(1), затем найдем координаты точки $C$, пользуясь тем, что точка $C$ симметрична точке $A$ относительно точки $P$:

5(2). **ANC**(–1, –5, 37/13, 10/13) ↲ S ↲. Результат: $\left[\frac{87}{13}, \frac{85}{13}\right]$.

6(2). Найдем уравнения сторон ромба — выполним пункты 6(1), 7(1), уравнение стороны $CD$:

**LINE**(87/13, 85/13, 61/13, –6/13) ↲ S ↲.

Результат: $y=\frac{7x}{2}-\frac{439}{26}$.

*3-й способ.*

1(3). Выполним пункт 1(1).

2(3). Точка $D$ симметрична точке $B$ относительно прямой $3x-2y-7=0$, пользуясь этим, найдем координаты точки $D$:

**TOCH_SIM**(1, 2, 3, –2, –7) ↲ S ↲.

Результат: $\left[\frac{61}{13}, -\frac{6}{13}\right]$.

3(3). Найдем уравнение прямой $BD$ — это уравнение второй диагонали:

**LINE**(1, 2, 61/13, –6/13) ↲ S ↲. Результат: $y=\frac{8}{3}-\frac{2x}{3}$.

4(3). Точка $C$ симметрична точке $A$ относительно прямой $BD$, найдем ее координаты:

**TOCH_SIM**(–1, –5, –2/3, –1, 8/3) ↵ S ↵.

Результат: $\left[\frac{87}{13}, \frac{85}{13}\right]$.

Осталось найти уравнения сторон ромба.

Продумайте другие способы решения задачи.

Постройте ромб и его диагонали. Установив «+» в точки $C$, $D$, $P$, убедитесь в правильности решения.

**Задача 5.** Дана вершина квадрата $A(-2; 3)$. На прямой $3x - 2y - 7 = 0$ лежит его диагональ. Построить квадрат.

Решение.

Точка $A$ не принадлежит данной прямой.

1. Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны. Угловой коэффициент данной диагонали равен 3/2, следовательно, угловой коэффициент второй диагонали равен –2/3.

2. Диагональ квадрата со стороной квадрата составляет угол 45°, tg 45° = 1. Пользуясь установленными двумя фактами найдем уравнения сторон квадрата, на которых лежит точка $A$:

**L_UG**(1, 3/2, –2, 3) ↵ S ↵. Результат: $y = -5x - 7$.

Пусть это уравнение стороны $AD$.

**L_UG**(–1, 3/2, –2, 3) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{x}{5} + \frac{17}{5}$.

Это уравнение стороны $AB$.

3. Найдем уравнение диагонали $AC$ — она перпендикулярна данной прямой и проходит через данную точку $A$:

**LN_PER**(–2, 3, 3, –2) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{5}{3} - \frac{2x}{3}$.

4. Точка $C$ симметрична точке $A$ относительно данной диагонали $3x - 2y - 7 = 0$, найдем ее координаты:

**TOCH_SIM**(–2, 3, 3, –2, –7) ↵ S ↵. Результат: $\left[\frac{88}{13}, -\frac{37}{13}\right]$.

5. Прямая $BC$ параллельна прямой $AD$, координаты точки $C$ известны, найдем уравнение прямой $BC$:

**LN_PAR**(88/13, –37/13, 1/5, –1) ↲ S ↲.

Результат: $y = \frac{x}{5} - \frac{21}{5}$.

6. Прямая $CD$ параллельна прямой $AB$, координаты точки $C$ известны, найдем уравнение прямой $CD$:

**LN_PAR**(88/13, –37/13, 5, 1) ↲ S ↲.
Результат: $y = 31 - 5x$.

*Для построения рисунка найдите координаты вершин $B$ и $D$. Постройте квадрат.*
*Найдите другие способы решения задачи.*

**Задача 6.** Точки $K(1; 4)$ и $L(-3; -2)$ являются серединами оснований равнобедренной трапеции, а точки $P\left(1; -\frac{46}{21}\right)$ и $Q\left(-\frac{9}{2}, \frac{10}{3}\right)$ лежат на ее боковых сторонах. Построить трапецию.

Решение.

1. Найдем уравнение прямой $KL$:

**LINE**(1, 4, –3, –2) ↲ S ↲. Результат: $y = \frac{3x}{2} + \frac{5}{2}$.

2. Основания трапеции перпендикулярны прямой $KL$, одно из них (например, $AD$) проходит через точку $K$, другое — $BC$ — через точку $L$. Пользуясь этим, найдем уравнения оснований трапеции.

Прямая $AD$: **LN_PER**(1, 4, 3/2, –1) ↲ S ↲.

Результат: $y = \frac{14}{3} - \frac{2x}{3}$.

Прямая $BC$: **LN_PER**(–3, –2, 3/2, –1) ↲ S ↲.

Результат: $y = -\frac{2x}{3} - 4$.

3. Постройте прямые $KL$, $AD$ и $BC$, установите «+» в точки ($P$) и ($Q$), убедитесь в том, что они лежат с разных сторон от прямой $KL$. Как в этом убедиться без чертежа?

Выясним, как расположена точка $P$ относительно прямой $KL$.

Подставим в уравнение прямой $KL$ $x = 1$, получим соответствующее значение $y = 4$. $4 > -46/21$.

Подставим в уравнение прямой $KL$ $x = -9/2$.

Результат: $-17/4$. $-17/4<10/3$. Итак, точки $P$ и $Q$ лежат с разных сторон от прямой $KL$.

Обозначим через $S$ точку, симметричную точке $P$ относительно прямой $KL$, а через $R$ — точку, симметричную точке $Q$ относительно этой прямой. Точка $S$ лежит на той же стороне трапеции, что и точка $Q$, а точка $R$ лежит на той же стороне трапеции, что и точка $P$.

4. Найдем координаты точки $S$:

**TOCH_SIM**(1, –46/21, 3/2, –1, 5/2) ↵ S ↵.

Результат: $\left[-\frac{33}{7}, \frac{34}{21}\right]$.

5. Уравнение одной из боковых сторон трапеции:

**LINE**(–9/2, 10/3,–33/7, 34/21) ↵ S ↵.

Результат: $y = 8x + \frac{118}{3}$.

6. Координаты точки $R$:

**TOCH_SIM**(–9/2, 10/3, 3/2, –1,5/2) ↵ S ↵.

Результат: $\left[\frac{5}{2}, -\frac{4}{3}\right]$.

7. Уравнение второй боковой стороны трапеции:

**LINE**(5/2, –4/3, 1, –46/21) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{4x}{7} - \frac{58}{21}$.

Для построения чертежа найдите координаты вершин трапеции.

Постройте чертеж.

Составьте аналогичную задачу и решите ее.

**Задача 7.** Точка $M(1;2)$ является серединой одного из оснований прямоугольной трапеции, а точка $K(2; -1)$ — серединой средней линии трапеции. Боковая сторона, перпендикулярная основаниям, лежит на прямой $4x - 3y + 5 = 0$. Построить трапецию.

Решение.

1. По условию основания трапеции лежат на прямых, перпендикулярных данной прямой. Найдем уравнение основания трапеции, на котором лежит точка $M$ (пусть это сторона $AD$):

**LN_PER**(1, 2, 4/3, –1) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{11}{4} - \frac{3x}{4}$.

2. Найдем координаты точки пересечения найденной и данной прямых — координаты точки $A$:

$\left[4x - 3y + 5 = 0, y = \frac{11}{4} - \frac{3x}{4}\right]$ ↵ L ↵. Результат: $\left[\frac{13}{25}, \frac{59}{25}\right]$.

3. Найдем уравнение прямой, на которой лежит средняя линия трапеции. Нам известны координаты точки $K$, лежащей на этой прямой, а также то, что она перпендикулярна данной прямой $4x - 3y + 5 = 0$ и параллельна прямой $AD$. Например, воспользуемся функцией **LN_PER**:

**LN_PER**(2, –1, 4/3, –1) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{1}{2} - \frac{3x}{4}$.

Обратите внимание на то, что найденная прямая действительно параллельна прямой $AD$: угловые коэффициенты этих прямых равны.

4. Найдем точку пересечения средней линии трапеции с ее боковой стороной — точку $L$:

$\left[4x - 3y + 5 = 0, y = \frac{1}{2} - \frac{3x}{4}\right]$ ↵ L ↵. Результат: $\left[-\frac{14}{25}; \frac{23}{25}\right]$.

5. Вершина $B$ трапеции симметрична вершине $A$ относительно средней линии трапеции (так как угол при вершине $A$ прямой), найдем координаты точки $B$:

**TOCH_SIM**(13/25, 59/25, 3/4, 1, –1/2) ↲ S ↲.

Результат: $\left[-\frac{41}{25},-\frac{13}{25}\right]$.

Можно было использовать симметрию точек $A$ и $B$ относительно точки $L$.

6. Вершина $D$ симметрична вершине $A$ относительно точки $M$, найдем ее координаты:

**ANC**(13/25, 59/25, 1, 2) ↲ S ↲. Результат: $\left[\frac{37}{25},\frac{41}{25}\right]$.

7. Найдем координаты точки $N$, симметричной точке $L$ относительно точки $K$:

**ANC**(–14/25, 23/25, 2, –1) ↲ S ↲. Результат: $\left[\frac{114}{25},-\frac{73}{25}\right]$.

8. Точка $N$ принадлежит боковой стороне трапеции $CD$, можно найти уравнение прямой, на которой лежит сторона $CD$:

**LINE**(37/25, 41/25, 114/25, –73/25) ↲ S ↲.

Результат: $y = \frac{295}{77}-\frac{114x}{77}$.

Найдите координаты точки $C$ и постройте трапецию. Убедитесь в том, что построенная трапеция равнобедренная. Для этого найдите длины отрезков $AB$ и $CD$.

Найдите другие решения задачи.

**Задача 8.** Точки $A(-7; -4)$ и $C(5; 3)$ являются противоположными вершинами квадрата. Построить квадрат.

Решение.

Найдем координаты вершин квадрата $B$ и $D$.

*1-й способ.*

1. Найдем уравнение прямой $AC$:

**LINE**(–7, –4, 5, 3) ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{7x}{12} + \frac{1}{12}$.

2. Координаты середины отрезка $AC$ (точки $K$):

**C_OTR**(–7, –4, 5, 3) ↵ S ↵. Результат: $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

3. Уравнение перпендикуляра к прямой $AC$, проходящего через точку $K$:

**LN_PER**(–1, –1/2, 7/12, –1) ↵ S ↵.

Результат: $y = -\frac{12x}{7} - \frac{31}{14}$. (1)

Можно использовать вместо **LN_PER** функцию **LN2_PER**.

4. Найдем радиус описанной окружности — это расстояние между точками $K$ и $A$:

**RASST**(–7, –4, –1, –1/2) ↵ S ↵. Результат: $\frac{\sqrt{193}}{2}$.

5. Введем уравнение описанной окружности:

$$(x+1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{193}{4}. \qquad (2)$$

6. Найдем точки пересечения окружности с прямой (1). Для этого в уравнение окружности вместо $y$ подставим $-\frac{12x}{7}-\frac{31}{14}$ и решим полученное уравнение:

M S $x$ ↵ $y{:=}-\frac{12x}{7}-\frac{31}{14}$ ↵ S ↵ L ↵.

Результат: $x=-\frac{9}{2}$, $x=\frac{5}{2}$.

7. Найдем ординаты вершин квадрата $B$ и $D$, для этого подставим найденные значения $x$ в уравнение (1):

M S $x{:=}-\frac{9}{2}$ ↵ $y$ ↵ S ↵. Результат: $y=\frac{11}{2}$.

M S $x{:=}\frac{5}{2}$ ↵ $y$ ↵ S ↵. Результат: $y=-\frac{13}{2}$.

Следовательно, $B\left(-\frac{9}{2};\frac{11}{2}\right)$, $C\left(\frac{5}{2};-\frac{13}{2}\right)$.

Построим квадрат и описанную около него окружность. Введите параметрическое задание окружности $\left[-1+\frac{\sqrt{193}}{2}\cos t,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{193}}{2}\sin t\right]$ и постройте окружность.

Найдем уравнение стороны $AB$ квадрата.

**LINE**$\left(-7,-4,-\frac{9}{2},\frac{11}{2}\right)$ ↵ S ↵. Результат: $y=\frac{19\,x}{5}+\frac{113}{5}$.

Построим отрезок $AB$, то есть отрезок $\left[x,\frac{19\,x}{5}+\frac{113}{5}\right]$ при $x\in\left[-7,-\frac{9}{2}\right]$.

Продолжите решение задачи. Зрительно убедитесь в правильности выкладок.

*2-й способ.*

Выполним пункты 1, 2, 3, 4, 5.

6(6). Для нахождения координат вершин $B$ и $D$ воспользуемся функциями **TOCH1_R** и **TOCH2_R**:

$$\mathbf{TOCH1\_R}\left(\frac{\sqrt{193}}{2},-1,\frac{12}{7},1,\frac{31}{14}\right) \hookleftarrow \text{S} \hookleftarrow.$$

Результат: $\left[-\frac{9}{2},\frac{11}{2}\right]$

$$\mathbf{TOCH2\_R}\left(\frac{\sqrt{193}}{2},-1,\frac{12}{7},1,\frac{31}{14}\right) \hookleftarrow \text{S} \hookleftarrow.$$

Результат: $\left[\frac{5}{2},-\frac{13}{2}\right]$.

Получили тот же результат, что и в первом случае.

*3-й способ.*

1(3). Выполните пункт 1.

2(3). Пользуясь тем, что углы между диагоналями и сторонами квадрата равны 45°, а tg45° = 1, найдем уравнения сторон квадрата:

$\mathbf{L\_UG}\left(1,\frac{7}{12},-7,-4\right) \hookleftarrow \text{S} \hookleftarrow$. Результат: $y=\frac{19x}{5}+\frac{113}{5}$. (3)

$\mathbf{L\_UG}\left(-1,\frac{7}{12},-7,-4\right) \hookleftarrow \text{S} \hookleftarrow$. Результат: $y=-\frac{5x}{19}-\frac{111}{19}$. (4)

$\mathbf{L\_UG}\left(1,\frac{7}{12},5,3\right) \hookleftarrow \text{S} \hookleftarrow$. Результат: $y=\frac{19x}{5}-16$. (5)

$\mathbf{L\_UG}\left(-1,\frac{7}{12},5,3\right) \hookleftarrow \text{S} \hookleftarrow$. Результат: $y=\frac{82}{19}-\frac{5x}{19}$. (6)

«На глаз» видно, что это уравнения сторон прямоугольника: прямые (3) и (5) параллельны, прямые (4) и (6) также параллельны, прямые (3) и (4) взаимно перпендикулярны.

Найдите координаты вершин квадрата $B$ и $C$ (они нужны для построения отрезков — сторон квадрата) и постройте квадрат.

Координаты всех вершин квадрата известны. Продолжите решение задачи самостоятельно.

# ИССЛЕДОВАНИЕ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть дано уравнение кривой второго порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Fy + G = 0.$$

Известно, что оно задает либо эллипс, либо гиперболу, либо параболу, либо пару прямых (пересекающихся, параллельных, совпадающих). Встает задача для данного уравнения: определить, какую линию (или какие линии) оно задает.

> ***Замечание.*** Обычно в теории уравнение кривой второго порядка записывают в виде
>
> $$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Fy + G = 0,$$
>
> но при вводе функций удобнее заданный нами вид.

Теория по этому вопросу изложена во всех учебниках и задачниках по аналитической геометрии. Читателю предоставляется самостоятельно разобраться в структуре вводимых функций.

Введем функцию

$$\boxed{\mathbf{UR\_KR}(a,b,c,d,f,g,x,y) := ax^2 + bxy + cy^2 + dx + fy + g}$$

Она выдает уравнение кривой по заданным коэффициентам.

*1-й способ.* Возможны два случая: выражение $ac - b^2/4$ равно нулю или не равно нулю.

Введем функцию

$$\boxed{\mathbf{OPRED}(a,b,c) := q = ac - b^2/4}$$

Обычно это выражение задают в виде определителя, поэтому эта функция получила такое имя.

**А.** Выражение $ac - b^2 / 4 \neq 0$.

Введем функции

$$\mathbf{NAH\_UV}(a,b,c,d,f) := \left[u = \frac{bf - 2cd}{4ac - b^2}, v = \frac{bd - 2af}{4ac - b^2}\right]$$

$$\mathbf{NAH\_Z}(a,b,c) := \mathrm{SOLVE}(z^2 - (a + c)z + ac - b^2 / 4 = 0, z)$$

$$\mathbf{FORMA\_KR}(a,b,c,d,f,g,u,v,l,m,s,t) :=$$
$$-\frac{ls^2}{\mathrm{UR\_KR}(a,b,c,d,f,g,u,v)} - \frac{mt^2}{\mathrm{UR\_KR}(a,b,c,d,f,g,u,v)} = 1$$

**NAH_UV** — «нахождение *u* и *v*», **NAH_Z** — «нахождение *z*».

Порядок решения задачи следующий:

1. **NAH_UV**($a$, $b$, $c$, $d$, $f$) ↲ S ↲. Результат: $[u = u_1, v = v_1]$.
2. **NAH_Z**($a$, $b$, $c$) ↲ S ↲. Результат: $[z = z_1, z = z_2]$.
3. **FORMA_KR**($a$, $b$, $c$, $d$, $f$, $g$, $u_1$, $u_2$, $z_1$, $z_2$) ↲ S ↲.

Если результат $= 1$, то уравнение задает прямые $x = u_1$, $y = v_1$.

В задачах 1–12 определить, какую линию задает данное уравнение.

**Задача 1.** $5x^2 + 4xy + 2y^2 + 10x + 4y - 7 = 0$.

Решение.

1. **OPRED**(5, 4, 2) ↲ S ↲. Результат: $q = 6 \neq 0$.
2. **NAH_UV**(5, 4, 2, 10, 4) ↲ S ↲. Результат: $[u = -1, v = 0]$.
3. **NAH_Z**(5, 4, 2) ↲ S ↲. Результат: $[z = 1, z = 6]$.
4. **FORMA_KR**(5, 4, 2, 10, 4, −7, −1, 0, 1, 6) ↲ S ↲.

Результат: $\frac{s^2}{12} + \frac{t^2}{2} = 1$.

Это уравнение эллипса. Введем функцию

$$\mathbf{ELLIPS}(a,b,t) := \left[\frac{\cos t}{\sqrt{a}}, \frac{\sin t}{\sqrt{b}}\right]$$

5. **ELLIPS**(1/12, 1/2) ↲S ↲. Результат: $\left[3\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t\right]$.

Ответ: эллипс $\frac{s^2}{12}+\frac{t^2}{2}=1$ (или $\left[\sqrt{12}\cos t, \sqrt{2}\sin t\right]$).

**Задача 2.** $3x^2-4xy+4=0$.

Решение.

1. $q=-4\neq 0$.
2. **NAH_UV**(3, –4, 0, 0, 0) ↲S ↲. Результат: $[u=0, v=0]$.
3. **NAH_Z**(3, –4, 0) ↲S ↲. Результат: $[z=-1, z=4]$.
4. **FORMA_KR**(3, –4, 0, 0, 0, 4, 0, 0, –1, –4) ↲S ↲.

Результат: $\frac{s^2}{4}-t^2=1$.

Это гипербола. Постройте ее.

Ответ: гипербола $\frac{s^2}{4}-t^2=1$.

**Задача 3.** $xy+3x-3y-9=0$.

Решение.

1. $q\neq 0$.
2. **NAH_UV**(0, 1, 0, 3, –3) ↲S ↲. Результат: $[u=3, v=-3]$.
3. **NAH_Z**(0, 1, 0) ↲S ↲. Результат: $\left[z=\frac{1}{2}, z=-\frac{1}{2}\right]$.
4. **FORMA_KR**(0, 1, 0, 3, –3, –9, 3, –3, 1/2, –1/2) ↲S ↲.

Результат: = 1.

Следовательно, это две пересекающиеся прямые $x=3$, $y=-3$. Легко проверить это, разложив на множители левую часть уравнения.

Ответ: прямые $x=3$ и $y=-3$.

**Б.** Выражение $ac-b^2/4=0$.

Введем функции

$$\mathbf{FORMA\_PAR}(a,b,c,d,f,g,w,s,t):=t=\frac{s^2 w\sqrt{4a^2-8aw+b^2+4w^2}}{2ad+bf-2dw}$$

$$\mathbf{FORMA\_PR}(a,b,c,d,f,g,x,y):=$$
$$\left[\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}y+\frac{\sqrt{d^2-4g}+d}{2}=0, \sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}y-\frac{\sqrt{d^2-4g}-d}{2}=0\right]$$

Порядок решения задачи.
1. **NAH_Z**$(a, b, c)$ ↲ S ↲. Результат: $[z = z_1, z = 0]$.
2. **FORMA_PAR**$(a, b, c, d, f, g, z_1)$↲ S ↲.

Если результат $t = \frac{1}{0}$, то уравнение задает пару параллельных прямых, для нахождения их уравнений можно воспользоваться функцией **FORMA_PR**.

**Задача 4.** $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.

Решение.
1. **OPRED**(1, –2, 1) ↲ S ↲. Результат: $q = 0$.
2. **NAH_Z**(1, –2, 1) ↲ S ↲. Результат: $[z = 2, z = 0]$.
3. **FORMA_PAR**(1, –2, 1, –10, –6, 25, 2) ↲ S ↲.

Результат: $t = \frac{\sqrt{2}s^2}{2}$.

Это уравнение параболы.

**Задача 5.** $x^2 + 4xy + 4y^2 - 9 = 0$.

Решение.
1. $q = 0$.
2. $z = 5$.
3. **FORMA_PAR**(1, 4, 4, 0, 0, –9) ↲ S ↲. Результат: $t = \frac{1}{0}$.
4. **FORMA_PR**(1, 4, 4, 0, 0, –9) ↲ S ↲.

Результат: $[x + 2y + 3 = 0,\ \ x + 2y - 3 = 0]$.

Это две параллельные прямые. В данном случае легко сделать проверку.

**Задача 6.** $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$.

**Задача 7.** $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 4y - 4 = 0$.

**Задача 8.** $6x^2 + 2\sqrt{5}xy + 2y^2 - 21 = 0$.

**Задача 9.** $x^2 + 4xy + 4y^2 - 9 = 0$.

**Задача 10.** $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$.

**Задача 11.** $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 80 = 0$.

*2-й способ.* Этот способ описан в справочнике по высшей математике М.Я. Выгодского.

Возможны два случая: $A \neq C$ и $A = C$. Мы рассмотрим здесь только случай, когда $A \neq C$, так как во втором случае не составляет труда разобраться.

Будем считать, что функция **UR_KR** введена. Введем функции:

$$\mathbf{TG\_U}(a,b,c) := \frac{b}{a-c}$$

$$\mathbf{UG}(a,b,c) := \mathrm{ATAN}(\mathrm{T\_UG}(a,b,c))/2$$

$$\mathbf{X\_N}(a,b,c) := z\cdot \mathrm{COS}(\mathrm{UG}(a,b,c)) - t\cdot \mathrm{SIN}(\mathrm{UG}(a,b,c))$$

$$\mathbf{Y\_N}(a,b,c) := z\cdot \mathrm{SIN}(\mathrm{UG}(a,b,c)) + t\cdot \mathrm{COS}(\mathrm{UG}(a,b,c))$$

$$\mathbf{FORMA\_2}(a,b,c,d,f,g,x,y) := \mathbf{UR\_KR}(a,b,c,d,f,g,\mathrm{X\_N}(a,b,c),\mathrm{Y\_N}(a,b,c))$$

$$\mathbf{FORMA\_KR\_V}(a,c,d,f,g,x,y) := \frac{ax^2}{\frac{d^2}{4a}+\frac{f^2}{4c}-g} + \frac{cy^2}{\frac{d^2}{4a}+\frac{f^2}{4c}-g} = 1$$

Ход решения задачи ($a \neq c$):

1. **FORMA_2**$(a, b, c, d, f, g)$ ↵ S ↵X ↵.

Результат: $a_1z^2 + c_1t^2 + d_1z + f_1t + g_1$.

2. **FORMA_KR_V**$(a_1, c_1, d_1, f_1, g_1)$↵ X ↵.

Как вы поняли, мы найдем приближенное решение задачи.

**Задача 12.** $2x^2 - 4xy + 5y^2 - x + 5y - 4 = 0$.

Решение.

Решим задачу сначала вторым способом, а затем первым и сравним результаты.

*2-й способ.*

1. **FORMA_2**(2, –4, 5, –1, 5, –4) ↵ S ↵X ↵ E ↵ X ↵.

Результат: $\overline{z} + 1.3416z + 6t^2 + 4.9193t - 4$.

Видим, что коэффициент при $zt$ практически равен 0.

2. **FORMA_KR_V**(1, 6, 1.3416, 4.9193, –4) ↵ X ↵.

Результат: $0{,}1832x^2 + 1{,}0992y^2 = 1$. Это уравнение эллипса.

3. **ELLIPS**(0.1832, 1.0992) ↵ S ↵.

Результат: [2.3363cos$t$, 0.93796sin$t$].

*1-й способ.*

1. $q \neq 0$.
2. **NAH_Z**(2, –4, 5, –1) ↲ S ↲. Результат: $[z = 1,\ z = 6]$.
3. **NAH_UV**(2, –4, 5, –1, 5) ↲ S ↲.

Результат: $\left[u = -\dfrac{5}{12}, v = -\dfrac{2}{3}\right]$.

4. **FORMA_KR**(2, –4, 5, –1, 5, –4, –5/12, –2/3, 1, 6) ↲ S ↲.

Результат: $\dfrac{24s^2}{131} + \dfrac{144t^2}{131} = 1$.

5. **ELLIPS**(24/131, 144/131) ↲ S ↲.

Результат: $\left[\dfrac{\cos t}{\sqrt{\dfrac{131}{24}}}, \dfrac{\sin t}{\sqrt{\dfrac{131}{144}}}\right]$. ↲ X ↲.

Результат: $[2.3363\cos t, 0.953796\sin t]$.

Результаты совпали.

# МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

## 1. Ввод матрицы.

Пусть надо ввести матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Введите [[1, 3],[2, 5]] ↲. На экране появляется матрица $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

## 2. Сложение матриц.

Пусть надо сложить матрицы $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$.

Р е ш е н и е.

Введите $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ ↲ S ↲. Результат: $\begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{bmatrix}$.

**3. Умножение матрицы на число.**

Пусть надо умножить матрицу на число $w$.

Решение.

Введите w[[a, b], [c, d]].

$w\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ↵ S ↵. Результат: $\begin{bmatrix} wa & wb \\ wc & wd \end{bmatrix}$.

**4. Умножение матриц.**

Для того чтобы перемножить матрицы, надо при вводе между ними поставить точку.

**Пример.** Перемножить матрицы $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Решение.

[[1, 3], [2, 5]].[[1, 2],[3, 5]] ↵ S ↵. Результат: $\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{bmatrix}$.

Перемножьте эти матрицы в обратном порядке.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ↵ S ↵. Результат: $\begin{bmatrix} 5 & 13 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$.

Мы видим, что результаты получились разные, т.е. **умножение матриц не коммутативно.**

Выполните это упражнение в общем виде. Перемножьте матрицы $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ в прямом и обратном порядке. Сформулируйте правило перемножения матриц. Перемножьте две матрицы третьего порядка и проверьте, верно ли сформулированное вами правило.

**5. Транспонирование матриц.**

Транспонируем матрицу $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Для этого введите $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$`, то есть [[a,b], [c,d]]` ↵ S ↵. Результат: $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$.

( Знак ` находится на одной клавише со знаком ~ ).

**П р и м е р.** Транспонируйте матрицу $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

### 6. Нахождение матрицы, обратной данной.

Найдем матрицу, обратную матрице $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Введите [[a, b], [c, d]]^–1.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ^–1 ↵ S ↵. Результат: $\begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$.

Сделайте проверку. Для этого перемножьте эти матрицы в обоих порядках. В том и другом случае в результате получится матрица $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

**П р и м е р.** Найдите матрицу, обратную матрице $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

### 7. Нахождение определителя матрицы.

Пусть надо вычислить определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Эту задачу решает встроенная функция **DET**.

**DET**[[a,b], [c,d]] ↵ S ↵.

***Замечание.*** Круглые скобки после **DET** можно ставить, можно не ставить.

**П р и м е р.** Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$.

**Р е ш е н и е.**

**DET**[[2, 5], [4, 7]] ↵ S ↵

**8. Определение элементов матрицы.**
Эту задачу решает встроенная функция **ELEMENT**.

**Примеры**

Дана матрица $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Введем m: = [[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9]] ↲.

а) Найти элементы второй строки матрицы *m*.

Решение.
**ELEMENT**(m,2) ↲ S ↲. Результат: [4, 5, 6].

б) Найти элемент матрицы, стоящий во второй строке и третьем столбце, то есть элемент $a_{23}$.

Решение.
**ELEMENT(ELEMENT**(m,2),3) ↲ S ↲. Результат: 6.

**9. Определение размеров матрицы.**

Встроенная функция **DIMENSION** определяет число строк матрицы, то есть число элементов в столбце матрицы.

**Примеры**

Пусть дана матрица q: = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

а) Определим число строк матрицы q.
**DIMENSION**(q) ↲ S ↲. Результат: 3;

б) Определим число столбцов матрицы q.
**DIMENSION**(q\`) ↲ S ↲. Результат: 2.

Этот пример поможет нам ввести функцию для определения размера матрицы.

| |
|---|
| **RAZM_MAT**$(u)$ := [DIMENSION$(u)$, DIMENSION$(u)$] |

**Примеры**

а) **RAZM_MAT**(m) ↲ S ↲. Результат: [3, 2];
б) **RAZM_MAT**(q) ↲ S ↲. Результат: [3, 3].

**10. Сумма элементов матрицы.**

Пусть, например, нам надо найти сумму элементов какой-либо строки матрицы. Используем для этого встроенную функцию **SUM**.

$$\mathbf{SUM}(f(k),k,m,n) \hookleftarrow \mathrm{S} \hookleftarrow$$

Результат – сумма первых $n$ членов последовательности $x_k = f(k)$. Подробно эта функция рассматривается позднее.

Рассмотренные в пункте 9 примеры помогают нам ввести функцию для решения поставленной задачи.

$$\boxed{\mathrm{SUM\_EL}(u,k) := \sum_{i=1}^{\mathrm{DIMENSION}(u`)} \mathrm{ELEMENT}(\mathrm{ELEMENT}(u,k),i)}$$

**Примеры**

а) **SUM_EL**(m,1) ↵ S ↵. Результат: 6;
б) **SUM_EL**(m,2) ↵ S ↵. Результат: 15;
в) **SUM_EL**(q,1) ↵ S ↵. Результат: 3;
г) **SUM_EL**(q`,1) ↵ S ↵. Результат: 4.

Это сумма элементов первого столбца матрицы q.

Введите функцию для определения суммы всех элементов матрицы.

## Матричные уравнения

Решить матричные уравнения 1–4 и сделать проверку.

**Задача 1.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{X} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$

Решение.

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

*1-й способ.*

1. Найдем $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}^{-1}$. $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}^{-1}$ ↲ S ↲. Результат: $\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}4 & 7\\ 5 & 6\end{bmatrix}$ ↲ S ↲. Результат: $\begin{bmatrix}-2 & -9\\ 3 & 8\end{bmatrix}$.

Или сразу ввести $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix}4 & 7\\ 5 & 6\end{bmatrix}$.

[[1, 2], [2, 3]]^–1.[[4, 7], [5, 6]] ↲ S ↲. Результат: $\begin{bmatrix}-2 & -9\\ 3 & 8\end{bmatrix}$.

П р о в е р к а.

$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}-2 & -9\\ 3 & 8\end{bmatrix}$. Результат: $\begin{bmatrix}4 & 7\\ 5 & 6\end{bmatrix}$.

*2-й способ.*

1. Обозначим первую матрицу, например, через B1.

$B1 := \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$.

2. Введем B2: = B1\` (транспонированная матрица B1).

3. Умножим матрицу B2 на матрицу $\begin{bmatrix}4 & 7\\ 5 & 6\end{bmatrix}$.

$B2. \begin{bmatrix}4 & 7\\ 5 & 6\end{bmatrix}$ ↲ S ↲. Результат: $\begin{bmatrix}-2 & -9\\ 3 & 8\end{bmatrix}$.

**Задача 2.** Решите уравнение $X \cdot \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 3\\ 4 & 10\end{bmatrix}$.

Р е ш е н и е.

$X = \begin{bmatrix}5 & 3\\ 4 & 10\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}^{-1}$.

Выполните пример самостоятельно и сделайте проверку.

Ответ: $\begin{bmatrix}5 & 3\\ 4 & 10\end{bmatrix}$.

**Задача 3.** $\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\\ 2 & 5 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}2 & 4 & 7\\ 1 & 2 & 5\\ 4 & 2 & 3\end{bmatrix}$.

**Задача 4.** $X\cdot\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\\ 2 & 5 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 7\\ 1 & 2 & 5\\ 4 & 2 & 7\end{bmatrix}$.

## Решение систем линейных уравнений

**Задача 1.** Рассмотрим простой пример. Решить систему уравнений $\begin{cases}7x-3y=2\\ -2x+y=3\end{cases}$.

*1-й способ.*

$[7x-3y=2,-2x+y=3]$ ↵ L ↵. Результат: $[x=11, y=25]$.

*2-й способ.* Решим систему матричным способом. Требуется решить систему $\begin{bmatrix}7 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$.

1. $D1:=\begin{bmatrix}7-3\\ -21\end{bmatrix}\wedge -1$ ↵

2. $D1.\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$ ↵ S ↵.Результат: $\begin{bmatrix}11\\ 25\end{bmatrix}$.

Следовательно, $x=11$, $y=25$.

*3-й способ.*

**ROW_REDUCE**$\left[\begin{bmatrix}7-3\\ -21\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}\right]$ ↵ S ↵. Результат: $\begin{bmatrix}1 \ 0 \ 11\\ 0 \ 1 \ 25\end{bmatrix}$.

Следовательно, $x=11$, $y=25$.

Сделайте проверку полученного ответа.

> ***Замечание.*** Запись приведена в том виде, в каком мы видим ее на экране. Вводятся матрицы под знаком функции **ROW_REDUCE** в круглых скобках – как любое выражение под знаком любой функции.

Решить систему уравнений и сделать проверку.

**Задача 2.**

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 10 \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

Решение сводится к решению матричного уравнения:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} . \mathrm{X} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -6 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Перемножим матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -6 \\ 10 \end{bmatrix}. \text{ Результат: } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

П р о в е р к а.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}. \text{ Результат: } \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -6 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = -3$.

**Задача 3.**

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 - 2x_5 = 20 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 - x_6 = 12 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 - 2x_6 = 15 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 - x_6 = 17 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$, $x_6 = -3$.

# ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

***Базисными ортами*** называются единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, направленные соответственно по координатным осям O$x$, O$y$, O$z$.

***Свободным*** называется вектор, который без изменения длины и направления может быть перенесен в любую точку пространства.

Свободный вектор, заданный в координатном пространстве O$xyz$, может быть представлен в виде $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, где $a_x$, $a_y$, $a_z$ — проекции вектора $\vec{a}$ на соответствующие оси координат, их называют ***координатами вектора*** $\vec{a}$. Будем задавать вектор также в виде $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$.

Пусть $M$ — некоторая точка пространства. Обозначим через $M_x$ проекцию точки $M$ на ось O$x$. ***Абсциссой*** $x$ точки $M$ называется длина вектора $\vec{M}_x$, взятая со знаком плюс, если направление этого вектора совпадает с направлением орта $\vec{i}$, и со знаком минус в противном случае. Аналогично определяются ***ордината*** $y$ и ***аппликата*** $z$ точки $M$. Упорядоченная тройка чисел $x$, $y$, $z$ составляет координаты точки $M$. Тот факт, что точка $M$ имеет координаты $x$, $y$, $z$, записывают так: $M(x; y; z)$.

***Длина (модуль)*** вектора $\vec{a}$ обозначается через $a$ или $|\vec{a}|$ и определяется по формуле $a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}$ .

Направление вектора определяется углами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, образованными ими с осями координат Ox, Oy, Oz. Косинусы этих углов называются ***направляющими косинусами вектора***. Они определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}.$$

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Пусть $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$. Тогда сумма и разность этих векторов определяются по формулам:

$$\vec{a} + \vec{b} = (\vec{a}_x + \vec{b}_x)\vec{i} + (\vec{a}_y + \vec{b}_y)\vec{j} + (\vec{a}_z + \vec{b}_z)\vec{k},$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (\vec{a}_x - \vec{b}_x)\vec{i} + (\vec{a}_y - \vec{b}_y)\vec{j} + (\vec{a}_z - \vec{b}_z)\vec{k}.$$

Произведение вектора $\vec{a}$ на скалярный множитель $m$ определяется формулой $m\vec{a} = ma_x\vec{i} + ma_y\vec{j} + ma_z\vec{k}$. Векторы $\vec{a}$ и $m\vec{a}$ параллельны (коллинеарны). Если $m > 0$, то эти векторы направлены в одну сторону, если $m < 0$, то они направлены в противоположные стороны.

Вектор $\dfrac{\vec{a}}{a}$ имеет длину, равную единице и направлен в ту же сторону, что и вектор $\vec{a}$. Этот вектор $\dfrac{\vec{a}}{a}$ называют ***единичным вектором (ортом)*** вектора $\vec{a}$ и обозначают $\vec{a}_0$. Нахождение вектора $\vec{a}_0$ называют ***нормированием*** вектора $\vec{a}$.

Вектор $\vec{M}$, начало которого находится в начале координат, а конец — в точке $M(x; y; z)$, называется радиус-вектором точки $M$ и его обозначают как $\vec{r}(M)$ или просто $\vec{r}$. $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Пусть $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$. Тогда $\vec{AB} = \vec{r}(B) - \vec{r}(A)$ или $\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$.

$\left|\vec{AB}\right|$ есть расстояние между точками $A$ и $B$,

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{|\vec{AB}|},\ \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{|\vec{AB}|},\ \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{|\vec{AB}|}.$$

***Скалярным произведением двух векторов*** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла $\varphi$ между ними: $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\varphi$.

Если $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ненулевые векторы, а их скалярное произведение равно нулю, то эти векторы перпендикулярны ($\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$).

***Векторным произведением вектора*** $\vec{a}$ ***на вектор*** $\vec{b}$ называют третий вектор $\vec{c}$, определяемый следующим образом:

1) длина вектора $\vec{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть $c = ab\sin\varphi$, где $\varphi$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ после приведения к общему началу ориентированы по отношению друг к другу соответственно как орты $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

Векторное произведение $\vec{a}$ на $\vec{b}$ обозначается как $\vec{a}\times\vec{b}$.

Если $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ можно найти по формуле

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Равенство $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ является условием коллинеарности двух ненулевых векторов.

***Смешанным произведением векторов*** $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется скалярное произведение векторов $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$, то есть $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Известно, что $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, поэтому смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ обозначают $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Если $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$, то смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ можно найти по формуле

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$, если

1) хотя бы один из перемножаемых векторов равен нулю;
2) два из перемножаемых векторов коллинеарны;
3) три перемножаемых ненулевых вектора параллельны одной и той же плоскости (компланарность).

В системе Derive можно выполнять все рассмотренные операции над векторами.

**1. Ввод вектора**. Координаты вектора вводятся в квадратных скобках через запятую. Пусть $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$. Вводим [2, 3, –5] ↵.

Поэтому мы в дальнейшем иногда координаты вектора будем записывать в квадратных скобках.

### 2. Сложение векторов.

Сложить вектора $\vec{a} = \{3; -4; 8\}$ и $\vec{b} = \{-2; -3; 2\}$.

Решение.
[3, –4, 8] + [–1, –3, 2] ↲ S ↲ . Результат: [2, –7, 10].
Ответ: {2, –7, 10}.

### 3. Нахождение разности векторов.

Найти $\vec{a} - \vec{b}$ для векторов из предыдущего примера.

Решение.
[3, –4,8] – [–1, –3, 2] ↲ S ↲. Результат: [4, –1, 6].

### 4. Умножение вектора на скаляр.

Найти $3\vec{a}$, если $\vec{a} = \{2; -5; 7\}$.

Решение.
3 [2, –5, 7] ↲ S ↲. Результат: [6, –15, 21].

### 5. Нахождение скалярного произведения двух векторов.

Найти $\vec{a} \times \vec{b}$, если $\vec{a} = \{3; 4; 7\}$, $\vec{b} = \{2;-5;2\}$.

Решение.
[3, 4, 7] .[2, –5, 2] ↲ S ↲. Результат: 0.
Так как оба векторы ненулевые (их длины очевидно не равны нулю), то данные векторы перпендикулярны.

### 6. Нахождение векторного произведения векторов.

Найти векторное произведение векторов, данных в предыдущем примере.

Решение.
Для нахождения векторного произведения двух векторов служит встроенная функция **CROSS**.

**CROSS**([3, 4, 7], [2, –5, 2]) ↲ S ↲. Результат: [43, 8, –23].

Здесь и во всех предыдущих примерах можно было определить векторы, то есть обозначить их как-либо. Например, в данном случае

*a*: = [3, 4, 7] ↲,. *b*: = [2, –5, 2] ↲, **CROSS**(*a*, *b*) ↲ S ↲.
Результат: [43, 8, –23].

### 7. Нахождение длины вектора.

Начиная с версии 2.02 для нахождения длины вектора можно использовать встроенную функцию **ABS**. Например, пусть требуется найти длину вектора {1; 3; 2}.

Решение.

**ABS**[1, 3, 2] ↵ (На экране появится |[1,3,2]|) S ↵.

Результат: $\sqrt{14}$ .

Если вы работаете с версией 1.57, несложно определить функцию для решения этой задачи. Обозначим ее, например, **DLINA**.

$$\mathbf{DLINA}(v) := \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{\mathrm{DIMENSION}(v)} \mathrm{ELEMENT}(v,i)^2\right]}$$

Здесь приведено ее отображение на экране. Вводится она так:

$$\mathbf{DLINA}\,(v) := \sqrt{\mathrm{SUM}}\,(\mathrm{ELEMENT}(\,v,i)^2\,,i,1,\mathrm{DIMENSION}(\,v))$$

Использованы встроенные функции: **ELEMENT**, **DIMENSION** и **SUM**.

Функция **ELEMENT**($v$, $i$) определяет $i$-й элемент вектора $v$; функция **DIMENSION**($v$) – число элементов вектора $v$. Функция **SUM** определяет сумму элементов вектора, в данном случае сумму квадратов элементов вектора $v$. Подробнее об этой функции рассказано ниже.

В рассмотренном примере

**DLINA**[1, 3, 2] ↵ S ↵. Результат: $\sqrt{14}$ .

В обоих случаях круглые скобки вводить не обязательно, то есть можно ввести **ABS**[1, 3, 2] или **DLINA**[1, 3, 2], а не **ABS**([1, 3, 2]) или **DLINA**([1, 3, 2]) .

В дальнейшем будем обозначать длину вектора $\bar{a}$ через $|\bar{a}|$ , а вы замените модуль нужной функцией.

**8. Слияние векторов.**

В версии 2.6 (и выше) есть встроенная функция **APPEND**($v$, $w$), которая к координатам вектора $v$ приписывает (справа) координаты вектора $w$.

**APPEND**([1, 2, 3], [4, 6, 9]) ↵ S ↵. Результат: [1, 2, 3, 4, 6, 9].

# ЗАДАЧИ

**Задача 1.** При каком значении $m$ векторы $\{4m^2;21m;25\}$ и $\{5;-4m;1-9m^2\}$ перпендикулярны?

Решение.

Ищем значения $m$, при которых скалярное произведение данных векторов равно нулю, а длины векторов не равны нулю.

$[4m^2,21m,25].[5,-4m,1-9m^2]$↵ S ↵ L ↵.

Результат: $m=\frac{5}{17}$ и $m=-\frac{5}{17}$.

Ответ: при $m=\frac{5}{17}$, при $m=-\frac{5}{17}$.

**Задача 2.** Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\vec{a}_1=\{2;2;1\}$ и $\vec{a}_2=\{1;3;4\}$.

Решение.

Надо найти вектор $\vec{a}_3$ такой, что $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_3=0$ и $\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3=0$.

1. Введем векторы $a1:=[2,2,1]$ ↵, $a2:=[1,3,4]$ ↵, $a3:=[a,b,c]$ ↵.

2. Составим систему
$[a1.a3=0,\ a2.a3=0]$↵ S ↵.
Результат: $[2a+2b+c=0,\ a+3b+4c=0]$.

3. Решим полученную систему относительно $a$ и $b$.
$[2a+2b+c=0,\ a+3b+4c=0]$↵ L ↵ $a$↵ $b$ ↵.

Результат: $\left[a=\frac{5c}{4}, b=-\frac{7c}{4}\right]$.

4. Положим, например, $c=4$.
M S $a$↵ $b$↵ $c:=4$ ↵. Результат: $[a=5, b=-7]$.
Получили вектор $\{5;-7;4\}$.

5. Найдем длину полученного вектора.

$\left|[5,-7,4]\right|$↵ S ↵. Результат: $3\sqrt{10}$.

Таким образом, координаты найденного вектора надо разделить на $3\sqrt{10}$ и на $-3\sqrt{10}$. Полученные векторы и будут искомыми.

Ответ: $\left[\frac{5}{3\sqrt{10}},-\frac{7}{3\sqrt{10}},\frac{4}{3\sqrt{10}}\right]$ и $\left[-\frac{5}{3\sqrt{10}},\frac{7}{3\sqrt{10}},-\frac{4}{3\sqrt{10}}\right]$.

**Задача 3.** Найти $\vec{AB}$, если $A(-1; 3; 2)$, $B(2; -4; 7)$.

Р е ш е н и е.

[2, –4, 7]–[–1, 3, 2] ↲ S ↲. Результат: [3, –7, 5].

Ответ: [3, –7, 5].

**Задача 4.** Найти расстояние между точками $M(1; -5; 7)$ и $N(1; 3; -3)$.

Р е ш е н и е.

Длина вектора есть расстояние между началом и концом этого вектора.

**ABS**([1, –5, 7] – [1, 3, –3]) (или **DLINA**([1, –5, 7] – [1, 3, –3])) ↲ S ↲

Результат: $2\sqrt{41}$.

**Задача 5.** Доказать, что точки $A(4; 4; 3)$, $B(1; -2; 0)$, $C(-1; -6; -2)$ лежат на одной прямой.

Р е ш е н и е.

Найдем векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ и убедимся в том, что они коллинеарны. Так как точка $A$ является началом обоих векторов, то это будет означать, что все три точки лежат на одной прямой.

1. Найдем $\vec{AB}$. [1, –2, 0] – [4, 4, 3] ↲ S ↲.
Результат: [–3, –6, –3].

2. Найдем $\vec{AC}$. [–1, –6, –2] – [4, 4, 3] ↲ S ↲.
Результат: [–5, –10, –5].

Координаты найденных векторов пропорциональны, следовательно, векторы коллинеарны. В коллинеарности векторов можно убедиться, показав, что их векторное произведение равно нулю. Это можно сделать, выполнив одно действие.

**CROSS**( [1, –2, 0] – [4, 4, 3], [–1, –6, –2] – [4, 4, 3]) ↲ S ↲.
Результат: [0,0,0].

Введем функции, определяющие косинус угла между векторами и угол между векторами. Назовем их соответственно **COS_VEC** и **UGOL_VEC**. Так как $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\varphi$,

$\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, то

$$\mathbf{COS\_VEC}(v, w) := \cos t = \frac{v.w}{|v||w|}$$

$$\mathbf{UGOL\_VEC}(v, w) := t = \mathrm{ACOS}\left(\frac{v.w}{|v||w|}\right)$$

**Задача 6.** Дан треугольник $ABC$, $A(-1; 7; 8)$, $B(3; -3; 9)$, $C(10, -1, 1)$. Найти внутренний угол при вершине $A$ и внешний угол при вершине $C$.

Решение.

Угол при вершине $A$ будем искать как угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

1. Введем векторы $a$: = [–1, 7, 8] ↲, $b$: = [3, –3, 9] ↲, $c$: = [10, –1, 1] ↲.

2. Найдем угол при вершине $A$.

**UGOL_VEC**($b–a$, $c–a$) ↲S ↲. Результат: $t = \frac{\pi}{4}$. (MT Auto).

3. Аналогично найдем внутренний угол при вершине $B$.

**UGOL_VEC**($c–b$, $a–b$) ↲S ↲. Результат: $t = \frac{\pi}{2}$.

4. Внешний угол при вершине $C$ найдем как сумму внутренних углов при вершинах $A$ и $B$. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$.

**Задача 7.** Найти углы треугольника $ABC$, если $A(-1; -4; 0)$, $B(-2; -2; -2)$, $C(-3, -3, 3)$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$.

**Задача 8.** Даны 4 последовательных вершины четырехугольника $A(-4; -3; -2)$, $B(2; -2; -3)$, $C(-8, -5, 1)$, $D(4; -3; -1)$. Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

Р е ш е н и е.

Введем векторы $a$: = [–4, –3, –2] ↲, $b$: = [2, –2, –3] ↲, $c$: = [–8, –5, 1] ↲, $d$: = [4, –3, –1] ↲.

*1-й способ.*

Убедимся в том, что $\vec{AC}\cdot\vec{BD} = 0$.

$(c-a)\cdot(d-b)$ ↲ S ↲. Результат: 0, что и требовалось доказать.

*2-й способ.*

Найдем угол между векторами $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$.

**UGOL_VEC**($c-a$, $d-b$) ↲ S ↲. Результат: $t = \frac{\pi}{2}$ , что и требовалось доказать.

**Задача 9.** Вычислить длины диагоналей и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \{5;-2;1\}$ и $\vec{b} = \{3;8;-1\}$.

Р е ш е н и е.

Одна из диагоналей равна длине суммы данных векторов, а вторая — длине их разности.

$a$: = [5, –2, 1] ↲ $b$: = [3, 8, –1] ↲

$|a+b|$ ↲ S ↲. Результат: 10. $|a-b|$ ↲ S ↲. Результат: $6\sqrt{3}$.

Из определения векторного произведения следует, что искомая площадь равна модулю векторного произведения данных векторов.

$|$**CROSS**$(a,b)|$ ↲ S ↲. Результат: $2\sqrt{554}$.

Ответ: 10, $6\sqrt{3}$, $2\sqrt{554}$.

**Задача 10.** Дан треугольник с вершинами $A(9; -9; 13)$, $B(7; -13; 17)$, $C(17; -3; 17)$. Найти длину его высоты, проведенной из вершины $C$.

Р е ш е н и е.

Найдем площадь треугольника на основании того, что она равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$. Для удобства можно ввести функцию для нахождения площади треугольника по данным трем его вершинам (если вы собираетесь решить несколько подобных задач).

$$\textbf{PL\_TR\_VEC}\ (v, w, q) := \mathrm{S} = |\mathrm{CROSS}(w - v, q - v)|/2$$

1. Введем $a := [9, -9, 13]$ ↲ $b := [7, -13, 17]$ ↲ $c := [17, -3, 17]$ ↲
2. **PL_TR_VEC**$(a, b, c)$ ↲ S ↲. Результат: $S = 30$.
3. Так как высоту треугольника можно найти по формуле $h = \dfrac{2S}{a}$, где $a$ — длина стороны, на которую опущена высота, нам надо найти $|\vec{AB}|$.

$|a - b|$ ↲ S ↲. Результат: 6 . Следовательно, $h = 10$ .

Ответ: $h = 10$.

**Задача 11.** Вершины четырехугольника находятся в точках $A(-3\ -5;\ -1)$, $B(2;\ -20;\ 9)$, $C(-6;\ 1;\ -2)$, $D(-9;\ 10;\ -8)$. Показать, что $ABCD$ есть трапеция и найти длины ее оснований. Является ли трапеция равнобедренной?

Решение.

1. $\vec{AB}$ : [2, –20, 9] – [–3, –5, –1] ↲ S ↲. Результат: [5, –15, 10].
2. $\vec{BC}$ : [–6, 1, –2] – [2, –20, 9] ↲ S ↲. Результат: [–8; 21; –11].
3. $\vec{CD}$ : [–9, 10, –8] – [–6, 1, –2] ↲ S ↲. Результат: [–3, 9, –6].
4. $\vec{DA}$ : [–9, 10, –8] – [–3, –5, –1] ↲ S ↲. Результат: [–6, 15, –7].

Мы видим, что координаты векторов $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ пропорциональны, а координаты векторов $\vec{BC}$ и $\vec{DA}$ – нет. Следовательно, данный четырехугольник является трапецией, основания которой $AB$ и $CD$. Продолжите решение задачи самостоятельно.

**Задача 12.** Докажите, что четырехугольник $A(3;\ 2;\ -3)$, $B(2;\ 4;\ 6)$; $C(8;\ 3;\ 4)$, $D(9;\ 1;\ -5)$ есть параллелограмм. Решите задачу двумя способами.

**Задача 13.** Компланарны ли векторы: а) [1, 5, 2], [2, 3, 7] и [1, 12, –1], б) [–2, 5, 3], [1, 3, –7], [3, 5, –3].

Решение.

Найдем смешанное произведение данных векторов.

**DET**[ [1, 5, 2], [2, 3, 7], [1, 12, –1]] ↵ S ↵. Результат: 0.

Длины векторов не равны нулю, следовательно, данные векторы компланарны.

**Задача 14.** Доказать, что четыре точки $A(1; 2; 5)$, $B(2; -1; -6)$, $C(-3; 2; 13)$, $D(2; 4; 9)$ лежат в одной плоскости.

Решение.

Докажем, что три вектора, имеющие начало в одной из точек, например, в точке $A$, а конец в остальных точках, компланарны, то есть что их смешанное произведение равно нулю. Это будет означать, что все четыре точки лежат в одной плоскости.

$\vec{AB}$ : $a1$: = [2, –1, –6] – [1, 2, 5] ↵ S ↵.

$\vec{AC}$ : $a2$: = [–3, 2, 13] – [1, 2, 5] ↵ S ↵.

$\vec{AD}$ : $a3$: = [2, 4, 9] – [1, 2, 5] ↵ S ↵.

**DET**[$a1$, $a2$, $a3$] ↵ S ↵. Результат 0, что и требовалось показать.

**Задача 15.** В тетраэдре с вершинами $A(1; 0; -1)$, $B(1; -2; 2)$, $C(2; -3; 1)$, $D(1; 3; -1)$ найти площадь грани $ABC$ и длину высоты, проведенной к этой грани.

Решение.

Воспользуемся тем, что модуль смешанного произведения векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Объем тетраэдра равен одной шестой объема параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Для удобства решения подобных задач введем функцию нахождения объема параллелепипеда, заданного координатами его вершин.

$$\boxed{\textbf{OB\_PAR\_VEC}(v,w,s,q):=|\,\mathrm{DET}[w-v,s-v,q-v]|}$$

1. Введем $a$: = [1, 0, 1] ↵. $b$: = [1, –2, 2] ↵. $c$: = [2, –3, 1] ↵. $d$: = [1, 3, –1] ↵.

2. **OB_PAR_VEC**($a, b, c, d$) /6 ↵ S ↵. Результат: $\frac{3}{2}$.

3. Найдем площадь грани $ABC$.

**PL_TR_VEC**($a, b, c$) ↵ S ↵. Результат: $S = \frac{\sqrt{38}}{2}$.

4. $H = \frac{3V}{S} = \frac{9\sqrt{38}}{38}$.

Ответ: $S = \frac{\sqrt{38}}{2}, h = \frac{9\sqrt{38}}{38}$.

## Приложения векторной алгебры к механике

**Работа постоянной силы.** Если материальная точка, на которую действует сила $\vec{F}$, совершила перемещение по вектору $\vec{S}$, то работа $A$ равна скалярному произведению вектора $\vec{F}$ и вектора перемещения $\vec{S}$: $A = \vec{F}\vec{S} = |\vec{F}||\vec{S}|\cos\varphi$, где $\varphi$ — угол между векторами.

***Момент силы.*** *Пусть твердое тело неподвижно закреплено в точке А, а в точке В этого тела приложена сила* $\vec{F}$. Возникает вращающий момент, численно равный площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{F}$. В механике его называют ***моментом силы*** и обозначают вектором $\vec{M}$.

**Задача 1.** Даны три силы $\vec{F}_1 = \{3;4;-1\}$, $\vec{F}_2 = \{-5;2;7\}$, $\vec{F}_3 = \{2;-5;1\}$, приложенные к одной точке. Вычислить работу равнодействующей этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M(1;-3;-8)$ в положение $N(2;-7;3)$.

Решение.

1. Найдем равнодействующую этих сил $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$
[3, 4, –1] + [–5, 2, 7] + [2, –5, 1] ↵ S ↵.
Результат: [0, 1, 7].

2. Найдем вектор перемещения $\overrightarrow{MN}$.
[2, –7, 3] – [1, –3, –8] ↵ S ↵. Результат: [1, –4, 11].
3. Найдем работу: [0, 1, 7]. [1, –4, 11] ↵ S ↵. Результат: 73.
Ответ: 73.

**Задача 2.** Дана сила $\vec{F} = \{1;-2;4\}$ и точка ее приложения $M(3;2;-1)$. Найти момент этой силы относительно точки $A(1;2;3)$ и его направляющие косинусы.

Решение.

1. Найдем момент силы.

**CROSS**([1, –2, 4], [3, 2,–1]–[1, 2, 3]) ↵ S ↵. Результат: [8, 12, 4].

2. Найдем направляющие косинусы найденного вектора.

**COS_VEC**([8, 12, 4], [1, 0, 0]) ↵ S ↵. Результат: $\cos t = \dfrac{\sqrt{14}}{7}$.

**COS_VEC**([8, 12, 4], [0, 1, 0]) ↵ S ↵. Результат: $\cos t = \dfrac{3\sqrt{14}}{14}$.

**COS_VEC**([8, 12, 4], [0, 0, 1]) ↵ S ↵. Результат: $\cos t = \dfrac{\sqrt{14}}{14}$.

Для нахождения направляющих косинусов можно ввести функцию.

$$\boxed{\mathbf{NAP\_COS}(v) := \mathrm{VECTOR}\left(\frac{\mathrm{ELEMENT}(v,i)}{|v|}, i, 1, \mathrm{DIMENSION}(v)\right)}$$

> ***Замечание.*** На экране скобки, заключающие все, что стоит под знаком внешней функции **VECTOR**, квадратные, а не круглые. В некоторых случаях при определении функции в книге стоят квадратные скобки (как они отображаются на экране), а не круглые, как на самом деле надо вводить. В дальнейшем это специально не оговаривается.

В данном примере

**NAP_COS**[8, 12, 4] ↵ S ↵. Результат: $\left[\dfrac{\sqrt{14}}{7}, \dfrac{3\sqrt{14}}{14}, \dfrac{\sqrt{14}}{14}\right]$.

По свойству направляющих косинусов длина этого вектора должна быть равна единице. Проверим это.

$\left|\left[\dfrac{\sqrt{14}}{7}, \dfrac{3\sqrt{14}}{14}, \dfrac{\sqrt{14}}{14}\right]\right|$ ↵ S ↵. Результат: 1.

Можно было ввести функцию **NAP_COS** с указанием функции $\cos t$:

$$\mathbf{NAP\_COS}(v):=$$
$$\mathbf{VECTOR}\left(\cos t=\frac{\mathrm{ELEMENT}(v,i)}{|v|},i,1,\mathrm{DIMENSION}(v)\right)$$

Тогда

**NAP_COS**[8, 12, 4] ↵ S ↵.

Результат: $\left[\cos t=\frac{\sqrt{14}}{7},\cos t=\frac{3\sqrt{14}}{14},\cos t=\frac{\sqrt{14}}{14}\right]$.

Ответ: $\bar{M}=\{8;12;4\}$, $\frac{\sqrt{14}}{7}$, $\frac{3\sqrt{14}}{14}$, $\frac{\sqrt{14}}{14}$.

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ

Для вычисления пределов функций служит встроенная функция **LIM**. Пусть требуется вычислить предел функции $u(x)$ при $x\to t$. Тогда надо выполнить следующие действия: ввести LIM(u,x,t) и упростить, то есть нажать S ↵.

**LIM(u,x,t)** ↵ **S** ↵

Запомните, что вместо $+\infty$ вводится **inf**, а вместо $-\infty$ вводится **-inf**.

**Примеры**

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}x^3$.

Решение.

**LIM**($x$^3,$x$,2)↵S ↵. Результат: 8.

2. Вычислить $\lim\limits_{y\to 2}(axy^2-x^2y)$.

Решение.

**LIM** ($axy^2-x^2y,y,2$) ↵S ↵. Результат: $4ax-2x^2$.

3. Вычислить $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}(x^2y+2xy^3)$.

Решение.

**LIM** (**LIM**$(x^2y+2xy^3,x,2),y,3)$ ↵S ↵.

> *Замечание.* Функция **LIM** используется при определении функций пользователя в тех случаях, когда необходимо использовать значение непрерывной функции в какой-либо точке. В дальнейшем вы неоднократно встретитесь с этим.

В примерах 4 и 5 вычислить указанные пределы функции $y=f(x)$, построить графики данных функций и зрительно убедиться в согласовании результатов.

4. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$. Вычислить: а) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$, б) $\lim\limits_{x\to 2+}f(x)$, в) $\lim\limits_{x\to 2-}f(x)$, г) $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$, д) $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$.

Решение.

а) **LIM** $(1/(x^2-4),x,2)$ ↵S ↵. Результат: $\dfrac{1}{0}$.

Следовательно, этот предел равен $\infty$.

б) **LIM** $(1/(x^2-4),x,2,1)$ ↵S ↵.
Результат: $\infty$, то есть предел равен $+\infty$.

> *Замечание.* Если не отключена возможность использовать русский шрифт, на экране появится **ь**.

в) **LIM** $(1/(x^2-4),x,2,1)$ ↵S ↵. Результат: $\dfrac{1}{0}$.

Постройте график функции и зрительно убедитесь в том, что предел равен $-\infty$. В выражении $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{1}{x^2-4}$ выделите знаменатель дроби $x^2-4$ и разложите его на множители (F↵Rational ↵), результат: $\lim\limits_{x\to 2-\infty}\dfrac{1}{(x-2)(x+2)}$, упростить S ↵.
Результат: $-\infty$.

Решите примеры под буквами г) и д) самостоятельно. Обратите внимание на то, что данная функция четная. Сравните найденные пределы попарно.

Из полученных данных следует, что прямые $x = 2$ и $x = -2$ являются вертикальными асимптотами графика данной функции (подробнее об асимптотах смотрите в пункте «Асимптоты графика функции, заданной в декартовых координатах»). Постройте эти прямые. Для этого введите $[2, y]$ и $[-2, y]$ и постройте отрезки прямых.

5. $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Вычислите: а) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, б) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Решение.

а) **LIM (ATAN(**$x$**),** $x$**, inf)** ↲ S ↲. Результат: $\dfrac{\pi}{2}$.

*Замечание.* Если не отключена возможность использовать русский шрифт, на экране появится $\dfrac{y}{2}$;

б) **LIM (ATAN(**$x$**),** $x$**, –inf)** ↲ S ↲. Результат: $-\dfrac{\pi}{2}$.

В задачах 6—8 найти область определения данной функции, определить ее четность. Найти односторонние пределы в точках разрыва функции и пределы функции при $x$, стремящемся к крайнему левому и крайнему правому значениям аргумента. Построить график функции и зрительно убедиться в согласовании результатов.

6. $f(x) = \dfrac{1}{\arcsin x}$.

Ответ: $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \dfrac{2}{\pi}$, $\lim\limits_{x \to -+1} f(x) = -\dfrac{2}{\pi}$.

7. $f(x) = \dfrac{1}{\log_2 x}$.

Ответ: $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +1} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

8. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

В задачах 9—22 найти предел функции.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x}-x)$.

10. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+x}-x)$.

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)$.

12. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)$.

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2+3x})$.

14. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+3x})$.

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x})$.

16. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x})$.

17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\arcsin 3x}$.

18. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 5x2}{\sin^2 x2(e^{3x^2}-1)}$.

19. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2(ax)}{1-\cos bx}$.

20. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$.

21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$.

22. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-1)(\ln(2x-1)-\ln(2x+1))$.

23. Постройте график функции $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ и зрительно определите $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$, после чего вычислите $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+x}{3x^3+5x}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+x}{3x^3+5x}$. Сделайте выводы.

24. Постройте график функции $\left(\dfrac{5}{7}\right)^x$ и зрительно определите $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5}{7}\right)^x$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5}{7}\right)^x$, после чего вычислите $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x^4+3x}{7x^4-x^3}\right)$.

25. Вычислите $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^3+3x}{2x^3-5x}$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x^3+3x}{2x^3-5x}\right)^x$. Обратите внимание на то, что во втором примере есть неопределенность $1^\infty$, в отличие от пределов 15) *б*) и 16) *б*), в которых нет неопределенности.

26. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3x^3+x-1}{3x^2-5x+2}\right)^x$.

Решая примеры 25—28, убедитесь в справедливости равенства

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-1)g(x)}.$$

(Равенство есть смысл применять при «ручных» вычислениях только если выполняются оба равенства $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$)

27. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{a}{x}\right)^{tg\frac{\pi x}{2x}}$. 28. $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$. 29. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0+\infty} x\left(\operatorname{arctg} x-\dfrac{\pi}{2}\right)$. 31. $\lim\limits_{x\to -+1}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

32. $\lim\limits_{x\to 0+\infty}\dfrac{\ln(1+3)}{\ln(1+2^x)}$. 33. $\lim\limits_{x\to 0-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

## Бесконечно малые функции

Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** в точке $x_0$, если ее предел в этой точке равен нулю, то есть если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции в точке $x_0$. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то говорят, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая ***функция более высокого порядка***, чем $\beta(x)$. Если

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ – конечное число, отличное от нуля, говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции ***одного порядка***.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными***.

В задачах 1—3 определить, являются ли данные функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малыми в точке $x_0$. Если да, то являются ли они бесконечно малыми функциями одного порядка?

**Задача 1.** $\alpha(x)=x-1,\ \beta(x)=\log_2 x,\ x_0=1.$

**Задача 2.** $\alpha(x)=\cos\dfrac{\pi x}{2}, \beta(x)=1-\sqrt{x}, x_0=1.$

**Задача 3.** $\alpha(x)=\sin x,\ \beta(x)=1+\cos x,\ x_0=\pi.$

В задачах 4—6 доказать, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются эквивалентными бесконечно малыми в точке $x_0$.

**Задача 4.** $\alpha(x)=\sin(x-\dfrac{\pi}{4}),\ \beta(x)=1-\sqrt{2}\cos x,\ x_0=\dfrac{\pi}{4}.$

**Задача 5.** $\alpha(x)=\dfrac{1-x}{1+x},\ \beta(x)=1-\sqrt{x},\ x_0=1.$

**Задача 6.** $\alpha(x)=\ln\operatorname{tg} x,\ \beta(x)=1-\operatorname{ctg} x,\ x_0=\dfrac{\pi}{4}.$

В задачах 7—12 подберите числа $a$ и $n$ так, чтобы функции $\alpha(x)$ и $ax^n$ были эквивалентными бесконечно малыми функциями в точке $x_0=0$.

**Задача 7.** $\alpha(x)=1-\sqrt[3]{\cos x}.$

Решение.

Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x}$. Результат: 0. Следовательно, функция $1-\sqrt[3]{\cos x}$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $x$. Поэтому повысим степень $x$. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}=\dfrac{1}{6}$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2/6}=1$. Проверьте это.

Итак, $1-\sqrt[3]{\cos x}\sim\dfrac{x^2}{6}$, т.е. $a=\dfrac{1}{6},\ n=2.$

**Задача 8.** $\alpha(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$.

**Задача 9.** $\alpha(x) = \sin(\sqrt{1+x} - 1)$.

**Задача 10.** $\alpha(x) = \cos x - \sqrt[5]{\cos x}$.

**Задача 11.** $\alpha(x) = \arcsin(\sqrt{9+x^2} - 3)$.

**Задача 12.** $\alpha(x) = (1+x)^5 - 1$.

# АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Прямая называется ***асимптотой*** кривой $y = f(x)$, если расстояние от точки $M$, лежащей на кривой, до этой прямой стремится к нулю при удалении точки $M$ вдоль какой-нибудь ветви кривой в бесконечность.

Асимптотой может быть наклонная, горизонтальная, вертикальная прямая.

При нахождении асимптот пользуются следующими фактами:

1. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = b$, то прямая $y = kx + b$ является правой наклонной асимптотой кривой $y = f(x)$.

2. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - x) = b$, то прямая $y = kx + b$ является левой наклонной асимптотой кривой $y = f(x)$.

3. Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, то прямая $y = b$ является правой горизонтальной асимптотой кривой $y = f(x)$.

4. Если $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, то прямая $y = b$ является левой горизонтальной асимптотой кривой $y = f(x)$.

5. Если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$ справа.

6. Если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = -\infty$, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$ справа.

Введем функции

$$\boxed{\mathbf{K\_R}(u,x) := \lim_{x\to+\infty} \frac{u}{x}}$$

$$\boxed{\mathbf{ASN\_R}(u,x) := y = \mathbf{K\_R}(u,x)x + \lim_{x\to+\infty} (u - \mathbf{K\_R}(u,x)x)}$$

$$\boxed{\mathbf{K\_L}(u,x) := \lim_{x\to-\infty} \frac{u}{x}}$$

$$\boxed{\mathrm{ASN\_L}(u,x) := y = \mathrm{K\_L}(u,x)x + \lim_{x\to-\infty} (u - \mathbf{K\_L}(u,x)x)}$$

В дальнейшем, если будет задано построить график функции, следует понимать, что требуется построить кривую и ее асимптоты.

В задачах 1—12 требуется построить график данной функции.

**Задача 1.** Построить график функции

$$y = \frac{x^2}{x+1}.$$

Решение.

Данная функция определена и непрерывна на всей числовой прямой за исключением точки $x = -1$, поэтому выясним, является ли прямая $x = -1$ вертикальной асимптотой графика данной функции.

$\lim\limits_{x\to-1-0} \dfrac{x^2}{x+1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1+0} \dfrac{x^2}{x+1} = +\infty$, $\Rightarrow$ прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой графика данной функции.

Выясним, имеет ли кривая наклонные асимптоты.

ASN_R$(x^2/(x+1))$ ↵S ↵. Результат: $y=x-1$.

Следовательно, прямая $y=x-1$ является правой наклонной асимптотой.

ASN_L$(x^2/(x+1))$ ↵S ↵. Результат: $y=x-1$.

Следовательно, прямая $y=x-1$ является левой наклонной асимптотой.

Постройте наклонную асимптоту $y=x-1$, вертикальную асимптоту $[-1,y]$ при $y\in[-8;8]$ и график данной функции.

Пределы для $y$ зависят от масштаба, так как прямая строится очень быстро, можно пределы брать побольше, «с запасом», чтобы не чертить прямую повторно при уменьшении масштаба.

**Задача 2.** $y=x-2\operatorname{arctg} x$.

Решение.

Данная функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, следовательно, ее график не имеет вертикальных асимптот.

Выясним, имеет ли график функции наклонные асимптоты.

ASN_R$(x-2\operatorname{arctg}(x))$ ↵S ↵. Результат: $y=x-\pi$.

Следовательно, прямая $y=x-\pi$ является правой наклонной асимптотой.

ASN_L$(x-2\operatorname{arctg}(x))$ ↵S ↵. Результат: $y=x+\pi$.

Следовательно, прямая $y=x+\pi$ является левой наклонной асимптотой. Постройте наклонные асимптоты и кривую.

**Задача 3.** $y=\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$. Ответ: $x=3$, $y=x-3$.

**Задача 4.** $y=x\operatorname{arctg}\dfrac{x}{5}$. Ответ: $y=\dfrac{\pi x}{2}-5$, $y=-\dfrac{\pi x}{2}-5$.

**Задача 5.** $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

**Задача 6.** $y = \dfrac{x^2-4}{x+1}$.

**Задача 7.** $y = x + 2\operatorname{arctg} x$.

**Задача 8.** $y = \dfrac{x(x-1)^2}{(x+1)^3}$.

**Задача 9.** $y = \dfrac{x^3-1}{x^2}$.

**Задача 10.** $y = \dfrac{x^2}{4(1-x)}$.

**Задача 11.** $y = \dfrac{x^3}{2x^3-1}$.

**Задача 12.** $y = \dfrac{x(1-2x^2)}{1-x^2}$.

# ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

В первой части книги мы рассмотрели как строить кривые, заданные параметрически. Это довольно просто сделать, если функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны на всей числовой прямой. Постройте еще несколько кривых.

**Задача 1.** $\left[t(1-t^2), t^2(1-t^2)\right]$.

**Задача 2.** $\left[t^2, \dfrac{1}{3}t(3-t^2)\right]$.

**Задача 3.** $\left[\dfrac{1}{3}t(6-t), \dfrac{1}{3}t^2(6-t)\right]$.

**Задача 4.** $\left[2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t\right]$ кардиоида.

**Задача 5.** $\left[a\cos^3 t, a\sin^3 t\right]$ астроида.

**Задача 6.** Постройте эпициклоиды $[n\cos t + \cos nt,$ $n\sin t - \sin nt]$ при $n \in \overline{3,6}$, то есть при $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$.

**Задача 7.** Постройте гипоциклоиды $[n\cos t + \cos nt,$ $n\sin t - \sin nt]$ при $n \in \overline{3,6}$.

# АСИМПТОТЫ КРИВОЙ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

При построении кривых, заданных параметрически, могут возникнуть сложности при определении наклонных асимптот и определении пределов изменения аргумента, если функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют точки разрыва. Если неверно заданы пределы изменения аргумента, то картинка может «зависнуть». Поэтому при построении кривых, заданных параметрически, необходимо предварительно исследовать свойства функций $x(t)$ и $y(t)$.

При нахождении асимптот следует иметь в виду следующее:

1. $\left.\begin{matrix}\lim\limits_{t\to s} x(t) = \infty \\ \lim\limits_{t\to s} y(t) = \infty\end{matrix}\right| \Rightarrow$ кривая $y(x)$ может иметь наклонную асимптоту при $t \to s$.

2. $\left.\begin{matrix}\lim\limits_{t\to s} x(t) = \infty \\ \lim\limits_{t\to s} y(t) = b \in \mathrm{R}\end{matrix}\right| \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = b \in \mathrm{R} \Rightarrow$ прямая $y = b$ — горизонтальная асимптота кривой $y(x)$.

3. $\left.\begin{matrix}\lim\limits_{t\to s} x(t) = a \in \mathrm{R} \\ \lim\limits_{t\to s} y(t) = \infty\end{matrix}\right| \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} y(x) = \infty \Rightarrow$ прямая $x = a$ — вертикальная асимптота кривой $y(x)$.

4. $\left.\begin{matrix}\lim\limits_{t\to s} x(t) = a \in \mathrm{R} \\ \lim\limits_{t\to s} y(t) = b \in \mathrm{R}\end{matrix}\right| \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} y(x) = b \in \mathrm{R} \Rightarrow$ при $t \to s$ асимптот нет.

## ЗАДАЧИ

Построить кривые, заданные параметрически. Полезно, особенно в трудных случаях, после построения кривой на экране начертить кривую на бумаге и указать стрелками направление вычерчивания кривой, а также выделить некоторые точки, указать их координаты или значения параметра $t$, указать пределы изменения параметра.

**Задача 1.** $x(t) = \dfrac{t(1-t^2)}{1+3t^2}$, $y(t) = \dfrac{4t^2}{1+3t^2}$ .

Решение.

Обе функции определены при любом $t$. $x(t)$ — нечетная функция, $y(t)$ — четная $\Rightarrow$ кривая $y(x)$ симметрична относительно оси ординат.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = \mp\infty \\ \lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) = \dfrac{3}{4}\end{array}\right| \Rightarrow \text{прямая } y = \frac{4}{3} \text{ — горизонтальная асимптота}$$

кривой.

Постройте кривую и ее асимптоту.

*Замечание.* В дальнейшем вместо $x = x(t)$, $y = y(t)$ будем писать $[x(t), y(t)]$. Например, рассмотренную кривую зададим в виде $\left[\dfrac{t(1-t^2)}{1+3t^2}, \dfrac{4t^2}{1+3t^2}\right]$.

**Задача 2.** Построить кривую $\left[\dfrac{1}{1+t^2}, \dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2}\right]$.

Решение.

Обе функции определены при любом $t$: $x(t)$ — четная функция, $y(t)$ — нечетная $\Rightarrow$ кривая симметрична относительно оси абсцисс.

$\forall\, t{:}x(t)>0 \Rightarrow$ кривая расположена в правой полуплоскости.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = 0 \\ \lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) = \mp\infty\end{array}\right| \Rightarrow \text{прямая } x = 0 \text{ — вертикальная асимптота кри-}$$

вой (правосторонняя).

Постройте кривую. Ее асимптота совпадает с осью ординат.

**Задача 3.** Построить кривую $\left[2+t, \dfrac{t^2}{1-t^2}\right]$.

Решение.
Функция $x(t)$ определена всюду, $y(t)$ — всюду, кроме $t=1$ и $t=-1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to-1} x(t)=1\\ \lim\limits_{t\to-1-0} y(t)=-\infty\\ \lim\limits_{t\to-1+0} y(t)=+\infty\end{array}\right| \Rightarrow \text{прямая } x=1 \text{ — вертикальная асимптота}$$

кривой.

Убедитесь в том, что прямая $x = 3$ также является вертикальной асимптотой кривой.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t)=+\infty\\ \lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t)=-1\end{array}\right| \Rightarrow \text{прямая } y=-1 \text{ — горизонтальная асимптота}$$

кривой.

Для построения вертикальных асимптот кривой зададим их в виде $[1, y]$ и $[3, y]$. Так как прямые строятся очень быстро, при построении асимптот можно задать достаточно большие пределы, например, от –20 до 20.

**Задача 4.** Постройте кривую $\left[1+t, \dfrac{1}{1-t^2}\right]$.

Определите асимптоты кривой самостоятельно и постройте эту кривую.

Введем функции

$$\boxed{\mathbf{K2AS}(u,v,s,t) := \lim_{t\to s} \frac{v}{u}}$$

$$\boxed{\mathbf{ASN2}(u,v,s,t,x,y) := y = \mathrm{K2AS}(u,v,s,t)x + \lim_{t\to s}\left(v - \mathrm{K2AS}(u,v,s,t)u\right)}$$

Функция **ASN2** определяет наклонную асимптоту функции, заданной параметрически. Ясно, что она определяет также горизонтальную асимптоту. Используя ее, можно также найти вертикальную асимптоту кривой.

**Задача 5.** Постройте кривую $\left[\frac{t^2}{1-t}, \frac{t^3}{1-t^2}\right]$.

Р е ш е н и е.

Постройте графики функций $x = x(t)$ (рис. 14) и $y = y(t)$ (рис. 15).

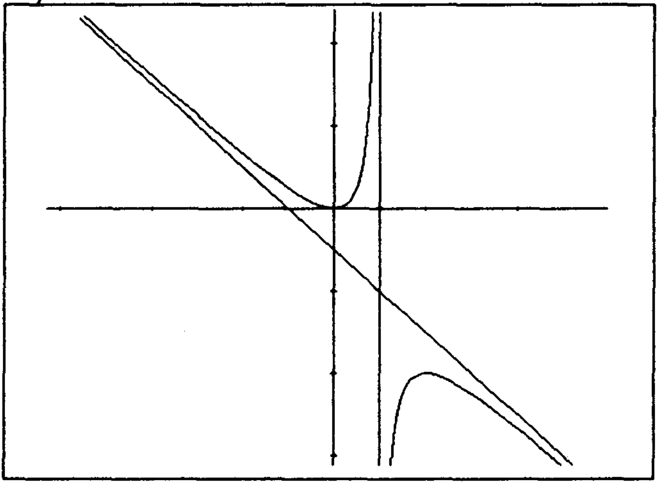


**Рис. 14**

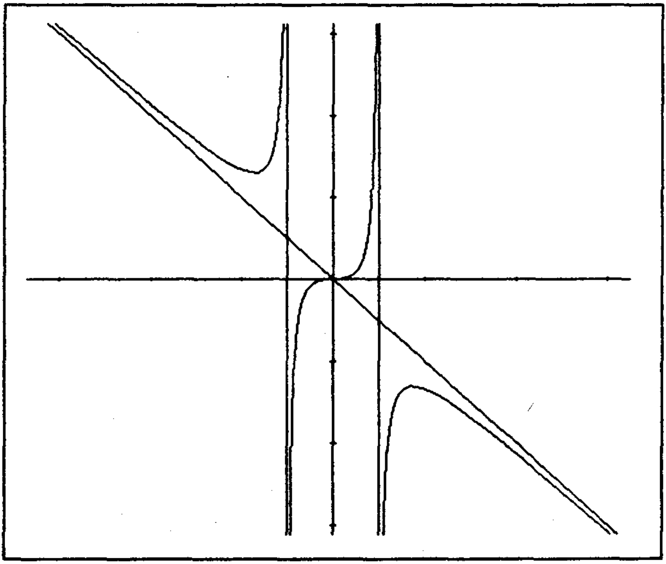


**Рис. 15**

По графикам этих функций определяем, имеет ли кривая асимптоты.

1. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to 1\pm 0} x(t) = \pm\infty \\ \lim\limits_{t\to 1\pm 0} y(t) = \pm\infty\end{array}\right|$ $\Rightarrow$ проверим, существует ли наклонная асимптота кривой при $t\to 1$.

$$\mathrm{ASN2}\left(\frac{t^2}{1-t}, \frac{t^3}{1-t^2}, 1\right) \dashv \mathrm{S} \dashv. \text{ Результат: } y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

Это уравнение наклонной асимптоты кривой.

2. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to -1} x(t) = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{t\to -1} y(t) = \infty\end{array}\right|$ $\Rightarrow$ прямая $x = \dfrac{1}{2}$ — вертикальная асимптота кривой.

Функция $x = x(t)$ непрерывна в точке $t = -1$, поэтому вместо ее предела можно найти ее значение в этой точке: $x(-1) = \dfrac{1}{2}$ или $\mathrm{ASN2}\left(\dfrac{t^3}{1-t^2}, \dfrac{t^2}{1-t}, -1, t, y, x\right) \dashv \mathrm{S} \dashv$.

3. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to \pm\infty} x(t) = \mp\infty \\ \lim\limits_{t\to \pm\infty} y(t) = \mp\infty\end{array}\right|$ $\Rightarrow$ выясним, есть ли наклонная асимптота кривой при $t\to+\infty$ и при $t\to-\infty$.

$$\mathrm{ASN2}\left(\frac{t^2}{1-t}, \frac{t^3}{1-t^2}, \mathrm{inf}\right) \dashv \mathrm{S} \dashv. \text{ Результат: } y = x + 1.$$

$$\mathrm{ASN2}\left(\frac{t^2}{1-t}, \frac{t^3}{1-t^2}, -\mathrm{inf}\right) \dashv \mathrm{S} \dashv. \text{ Результат: } y = x + 1.$$

Итак, прямая $y = x + 1$ — наклонная асимптота кривой.

Постройте асимптоты кривой и три ее ветви: при $t \in [-20, -1.05]$, $t \in [-0.95, 0.95]$, $t \in [1.05, 20]$ (рис. 16).

На рис. 17 и 18 приведены фрагменты этой кривой. Передвигая указатель «+» и центрируя, постройте крупно каждую из ветвей кривой.

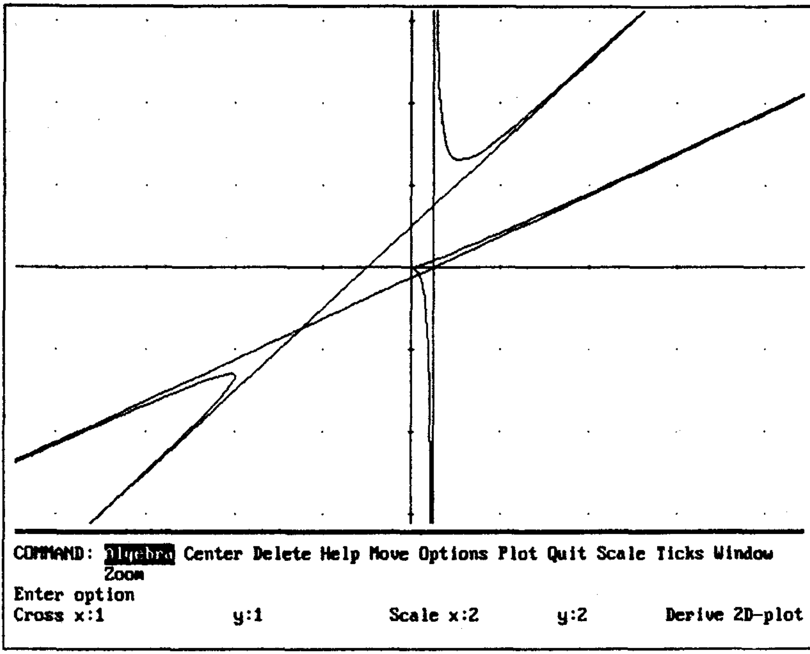

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
Zoom
Enter option
Cross x:1 y:1 Scale x:2 y:2 Derive 2D-plot

**Рис. 16**

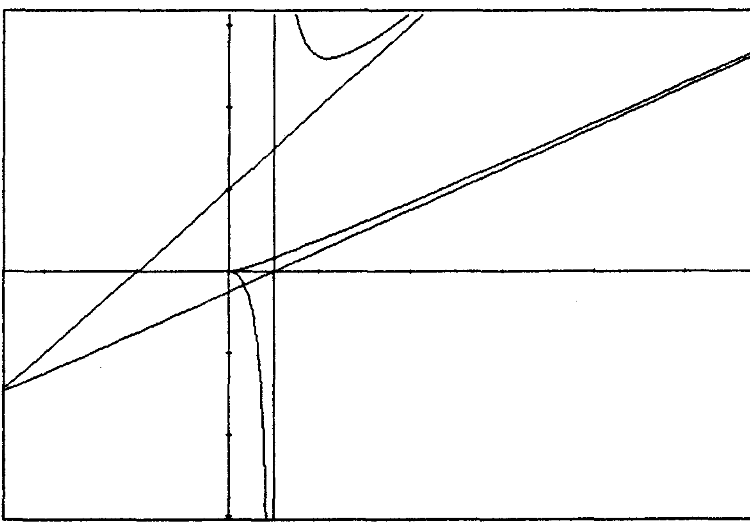


**Рис. 17**

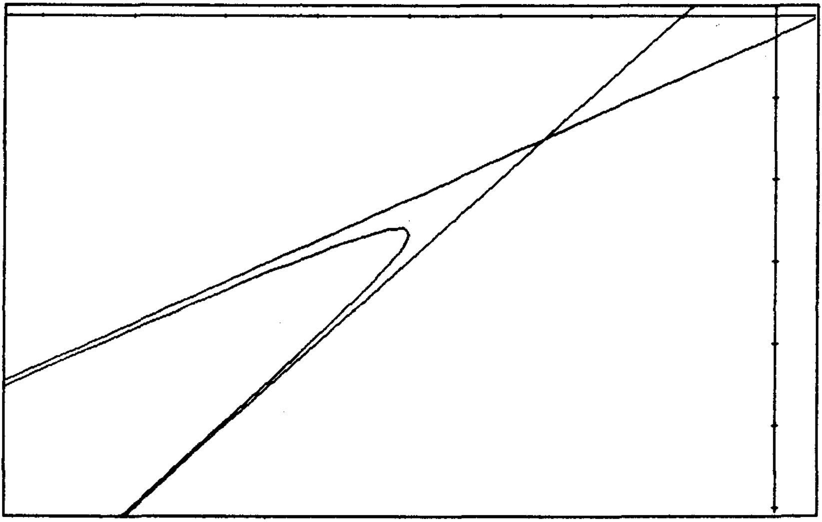


Рис. 18

Постройте кривые в задачах 6—24. В ответах к ним указаны уравнения асимптот.

**Задача 6.** $\left[\dfrac{t^2}{t-1}, \dfrac{t}{t^2-1}\right]$. Ответ: асимптоты $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{4}$ $(t=1)$, $y=0$ $(t=\pm\infty)$, $x=-\dfrac{1}{2}$ $(t=-1)$ (рис. 19).

**Задача 7.** $\left[\dfrac{t^2}{1-t^2}, \dfrac{t^3}{1-t^3}\right]$. Ответ: асимптоты $y=\dfrac{2x}{3}-\dfrac{1}{6}$ $(t=1)$, $y=-\dfrac{1}{2}$ $(t=-1)$, $y=x$ $(t=\pm\infty)$.

На рис. 20 и 21 представлены кривая и ее часть.

**Задача 8.** $\left[\dfrac{2t^2}{t^2-1}, \dfrac{t^2}{t-1}\right]$. Ответ: $y=x+\dfrac{1}{2}$, $y=-\dfrac{1}{2}$, $x=2$ (рис. 22).

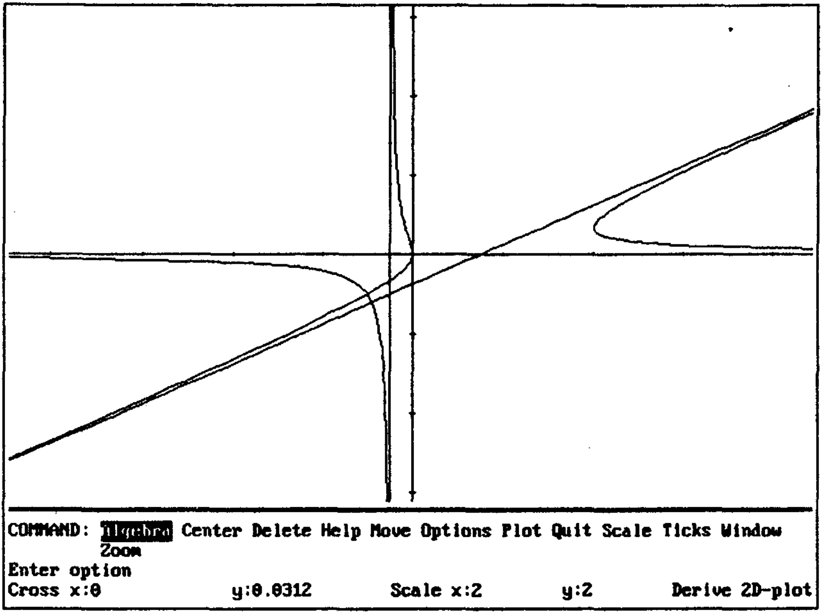

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
Zoom
Enter option
Cross x:0
y:0.0312
Scale x:2
y:2
Derive 2D-plot

**Рис. 19**

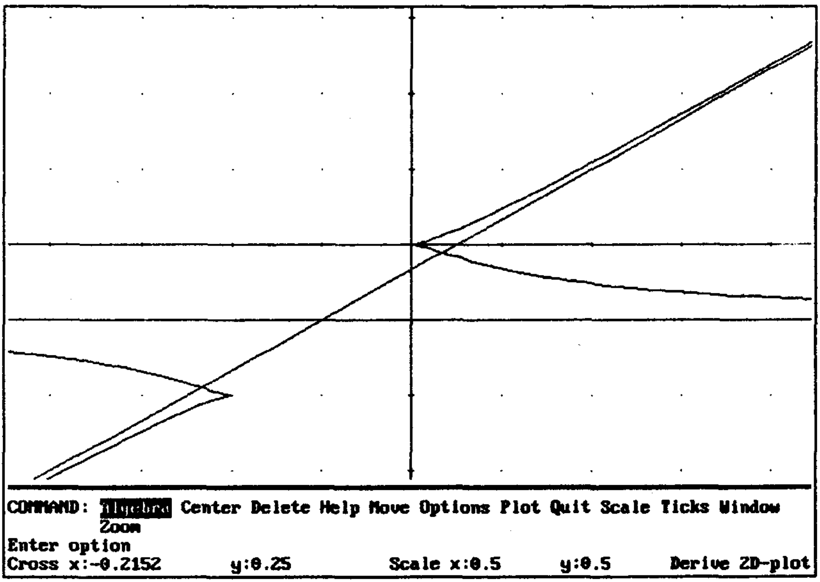
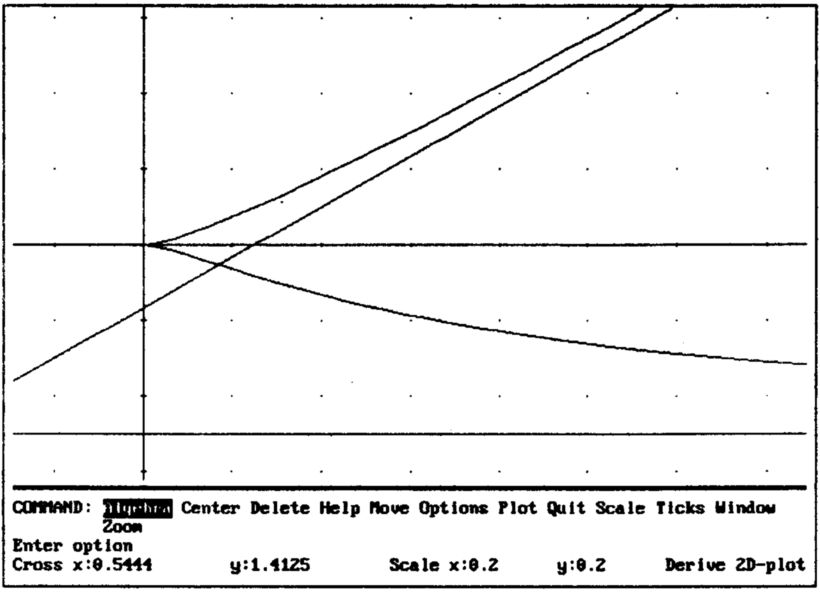
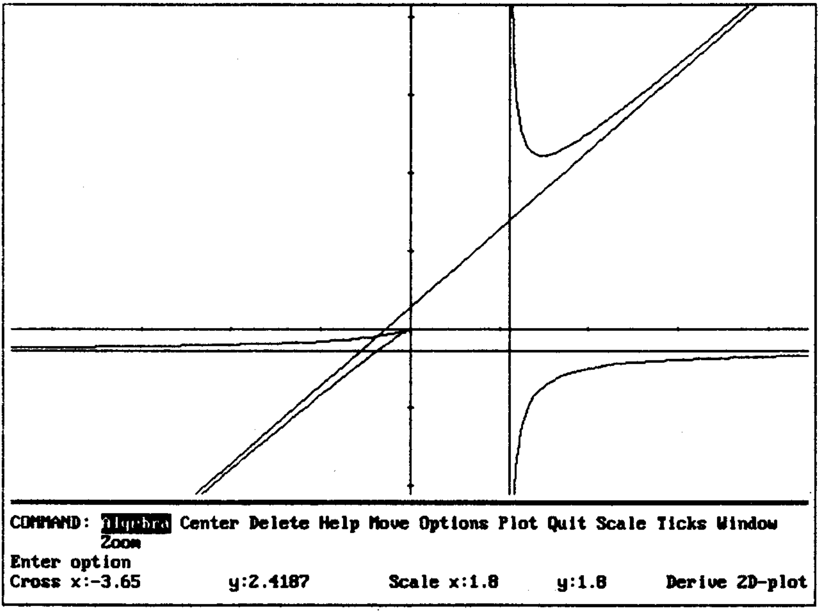

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
Zoom
Enter option
Cross x:-0.2152
y:0.25
Scale x:0.5
y:0.5
Derive 2D-plot

**Рис. 20**



COMMAND: Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
Zoom
Enter option
Cross x:0.5444 y:1.4125 Scale x:0.2 y:0.2 Derive 2D-plot


**Рис. 21**



COMMAND: Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
Zoom
Enter option
Cross x:-3.65 y:2.4187 Scale x:1.8 y:1.8 Derive 2D-plot


**Рис. 22**

**Задача 9.** $\left[\dfrac{t^2+1}{t^3+1}, \dfrac{t(t^2+1)}{t^3+1}\right]$. Ответ: $y = \dfrac{2}{3} - x$.

***Указание.*** При построении кривой задайте значения параметра, например, от –200 до –1.01 и от –0.99 до 200. Чем больше увеличение, тем больше по абсолютной величине должны быть крайнее левое и крайнее правое значения. Найдите объяснение этому, внимательно следите за построением кривой. Начертите кривую на бумаге и нарисуйте стрелки, указывающие направление вычерчивания кривой.

**Задача 10.** $\left[\dfrac{t^2}{4(1-t)}, \dfrac{t^3}{8(t-1)}\right]$. Ответ: $y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{8}$.

**Задача 11.** $\left[\dfrac{t}{1-t^2}, \dfrac{t\left(1-2t^2\right)}{1-t^2}\right]$. Ответ: $y = -x-2$, $y = 2-x$, $x = 0$ (рис. 23).

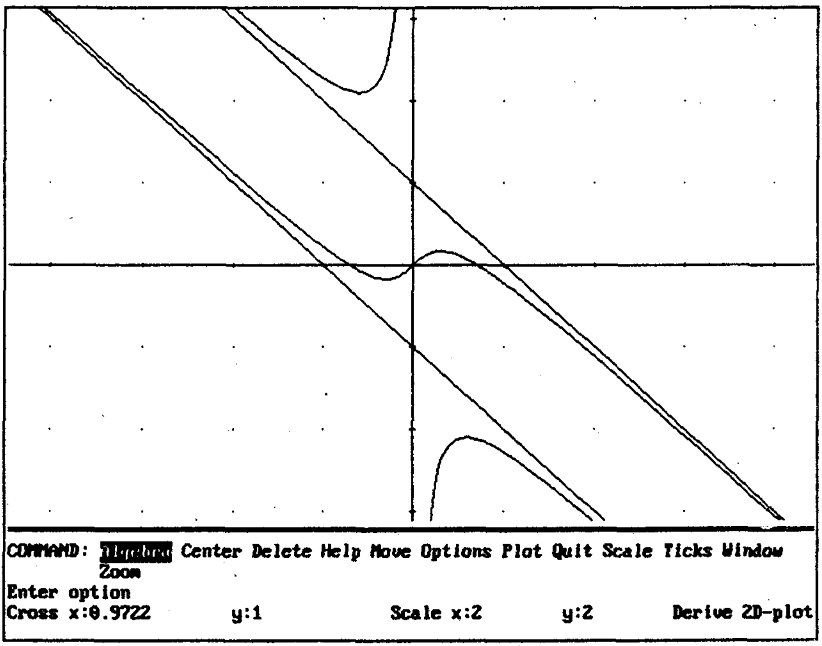



**Рис. 23**

**Задача 12.** $\left[\dfrac{t^2}{t-1}, \dfrac{t^2-1}{t}\right]$. Ответ: $y = x-1, y = 0, x = 0$ (рис. 24).

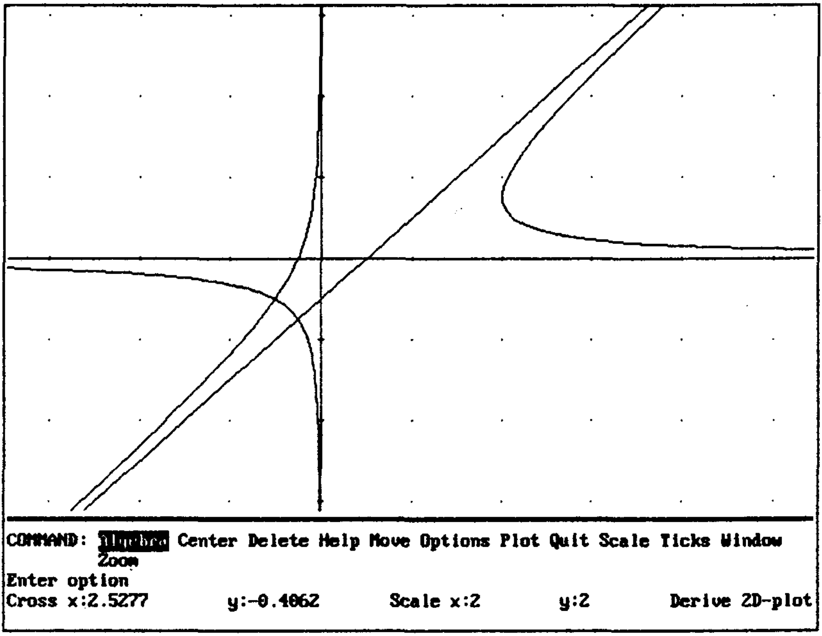



**Рис. 24**

**Задача 13.** $\left[t^2, t^2 + \dfrac{2}{t}\right]$. Ответ: $y = x$, $x = 0$.

**Задача 14.** $\left[t^3 - \dfrac{1}{t}, t^3 + 1\right]$. Ответ: $y = 1$, $y = x+1$.

**Задача 15.** $\left[t^3, t^3 - \dfrac{1}{t+1}\right]$. Ответ: $y = x$, $x = -1$.

**Задача 16.** $\left[t^2 + 1, \dfrac{t^2-1}{t}\right]$. Ответ: $x = 1$.

**Задача 17.** $\left[\frac{t}{t^2-1}, \frac{t^2}{t-1}\right]$. Ответ: $y = 2x + \frac{3}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, $x = 0$ (рис. 25).

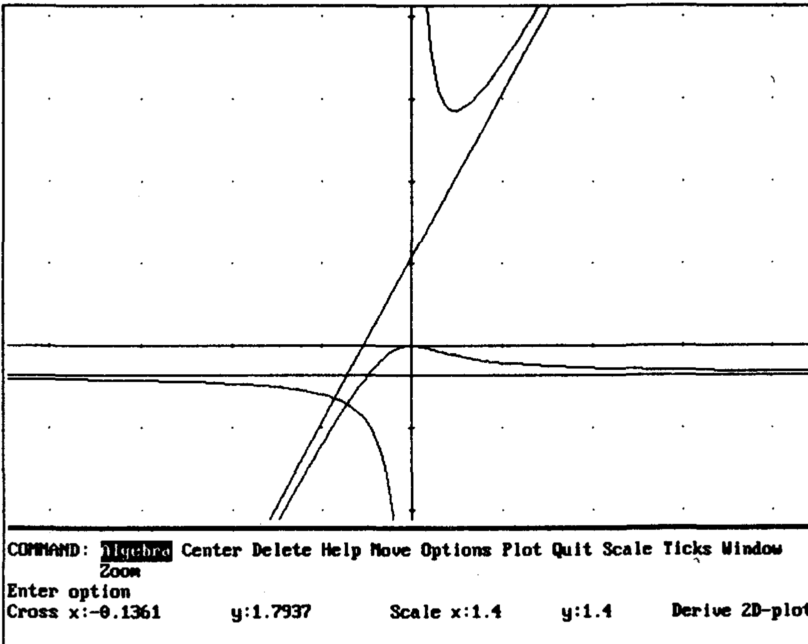



**Рис. 25**

**Задача 18.** $\left[4t^2, \frac{1}{t^2+t-2}\right]$. Ответ: $x = 4$, $x = 16$.

**Задача 19.** $\left[2t-1, \frac{t^3}{1-t^2}\right]$. Ответ: $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$, $x = -3$, $x = 1$.

**Задача 20.** $\left[t^2, \frac{1}{t^3-1}\right]$. Ответ: $y = 0$, $x = 1$.

**Задача 21.** $\left[\dfrac{t^2}{t^2-1}, \dfrac{t^2}{t-1}\right]$. Ответ: $y = 2x + \dfrac{1}{2}$, $y = -\dfrac{1}{2}$, $x = 1$ (рис. 26).

Сравните с задачей 8 (рис. 22).

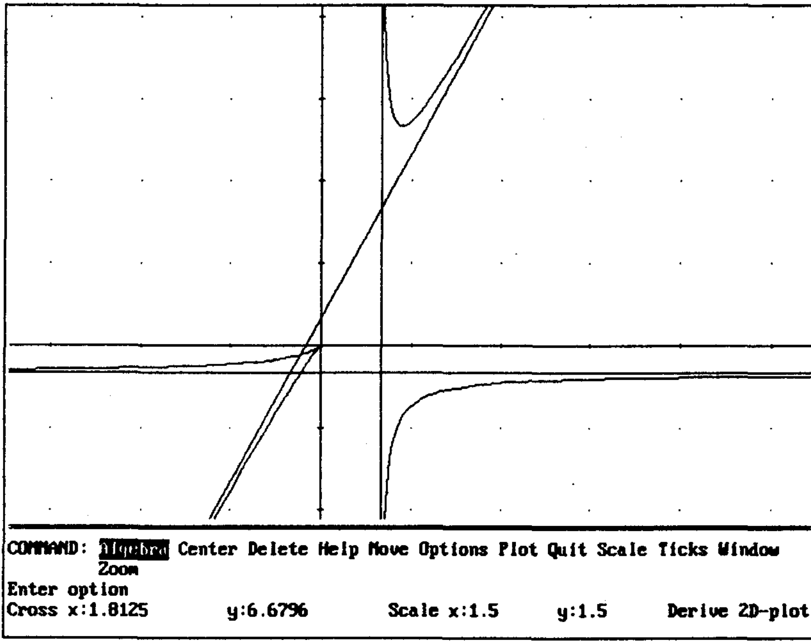



**Рис. 26**

**Задача 22.** $\left[\dfrac{t^2}{t-1}, \dfrac{t^2}{t^3+1}\right]$. Ответ: $y = \dfrac{1}{2}$, $y = 0$, $x = -\dfrac{1}{2}$.

**Задача 23.** $\left[\dfrac{2t^2}{1-t}, \dfrac{t^3}{t-1}\right]$. Ответ: $y = 1 - \dfrac{x}{2}$.

# ПЕРЕХОД ОТ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ К ПАРАМЕТРИЧЕСКОМУ ЗАДАНИЮ КРИВОЙ

В некоторых случаях от задания кривой в декартовых координатах можно перейти к ее заданию в параметрическом виде при помощи подстановки $y = tx$ или $x = ty$.

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Построить кривую $x^3 + y^3 - x^2 = 0$.

Решение.

Сделаем замену $y = tx$, из полученного равенства найдем $x$.

Результат: $x = \dfrac{1}{t^3 + 1}$. Следовательно, надо построить кривую $\left[\dfrac{1}{t^3+1}, \dfrac{t}{t^3+1}\right]$.

Если вам надо решить несколько подобных задач, можно ввести функции, ускоряющие переход к параметрическому заданию кривой.

Введем функции

$$\boxed{\textbf{FORMA1\_PAR}\,(u,x,y,t) := \lim(u,y,xt)}$$

$$\boxed{\textbf{FORMA2\_PAR}\,(u,x,y,t) := \lim(u,x,y/t)}$$

$$\boxed{\textbf{PERV}(u,x,y,t) := \mathrm{SOLVE}(\mathrm{FORMA1\_PAR}(u,x,y,t),x)}$$

$$\boxed{\textbf{VTOR}(u,x,y,t) = \mathrm{SOLVE}(t\,\mathrm{FORMA2\_PAR}(u,x,y,t),y)}$$

В функции **PER_PAR** укорочено название функции: **EL** вместо **ELEMENT.** Вводить надо полное название функции.

***Замечание.*** Можно, конечно, ввести функцию пользователя, заменив название встроенной функции, которое вам кажется слишком длинным.

$$\mathbf{PER\_PAR}(u,x,y,t) := \mathbf{VECTOR}([\mathrm{EL}(\mathrm{PERV}(u,x,y,t),k),\mathrm{EL}(\mathrm{VTOR}(u,x,y,t),k)], k,1,\mathbf{DIMENSION}(\mathbf{PERV}(u,x,y,t)))$$

$$\mathbf{PER\_PAR\_V}(u,x,y,t) := [\mathrm{PERV}(u,x,y,t),\mathrm{VTOR}(u,x,y,t)]$$

Вернемся к задаче.

1. **FORMA1_PAR**$(x^3+y^3-x^2)$ ↵ S ↵.

Результат: $x^3(t^3+1)-x^2$.

L x ↵. Результат: $x=\dfrac{1}{t^3+1}$, $x=0$. Следовательно, $y=\dfrac{t}{t^3+1}$.

2. **FORMA2_PAR** $(x^3+y^3-x^2)$ ↵ S ↵.

Результат: $y^3\left[\dfrac{1}{t^3}+1\right]-\dfrac{y^2}{t^2}$.

L y ↵. Результат: $y=\dfrac{t}{t^3+1}$, $y=0$.

Таким образом, можно пользоваться одной из этих функций, удобнее – функцией **FORMA1_PAR**.

3. **PERV**$(x^3+y^3-x^2)$ ↵ S ↵. Результат: $\left[x=0, x=\dfrac{1}{t^3+1}\right]$.

4. **VTOR**$(x^3+y^3-x^2)$ ↵ S ↵. Результат: $\left[y=0, y=\dfrac{t}{t^3+1}\right]$.

5. **PER_PAR**$(x^3+y^3-x^2)$ ↵ S ↵. Результат: $\begin{bmatrix} x=0, & y=0 \\ x=\dfrac{1}{t^3+1}, & y=\dfrac{t}{t^3+1} \end{bmatrix}$.

6. **PER_PAR_V**$(x^3+y^3-x^2)$ ↵ S ↵.

Результат: $\begin{bmatrix} x=0, & y=0 \\ x=\dfrac{1}{t^3+1}, & y=\dfrac{t}{t^3+1} \end{bmatrix}$.

Итак, надо построить кривую $\left[\dfrac{1}{t^3+1}, \dfrac{t}{t^3+1}\right]$.

Как видим, любой из этих функций можно пользоваться.

> ***Замечание***. В поздних версиях Derive имеет встроенные функции выделения правой и левой части, поэтому в этих версиях можно обойтись без функции **FORMA2_PAR** и не придется копировать результаты перед построением кривых.

В некоторых случаях удобнее сделать подстановку $x = ty$. Ее можно сделать, используя функции **PER_PAR** или **PER_PAR_V**. В рассматриваемом примере

**PER_PAR**$(x^3 + y^3 - x^2, y, x)$ ↵ S ↵.

Результат: $\begin{bmatrix} y = 0 & x = 0 \\ y = \dfrac{t^2}{t^3+1}, & x = \dfrac{t^3}{t^3+1} \end{bmatrix}$.

Следовательно, надо построить кривую $\left[\dfrac{t^3}{t^3+1}, \dfrac{t^2}{t^3+1}\right]$. (Не перепутайте порядок при копировании!)

Или

**PER_PAR_V**$(x^3 + y^3 - x^2, y, x)$ ↵ S ↵.

Постройте обе кривые и убедитесь в том, что они совпадают (рис. 27).

Вы видите, что в рассмотренном примере все равно, какую замену делать.

**Задача 2.** Построить кривую $xy - y^2 = x$.

Решение.

**PER_PAR**$(xy - y^2 - x)$ ↵ S ↵. Вывод: $\left[\dfrac{-1}{t(t-1)}, \dfrac{-1}{t-1}\right]$.

**PER_PAR**$(xy - y^2 - x, y, x)$ ↵ S ↵. Вывод: $\left[\dfrac{t^2}{t-1}, \dfrac{t}{t-1}\right]$.

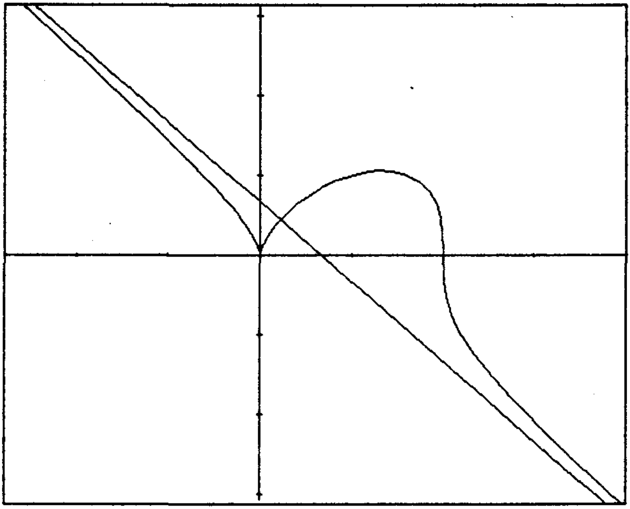


**Рис. 27**

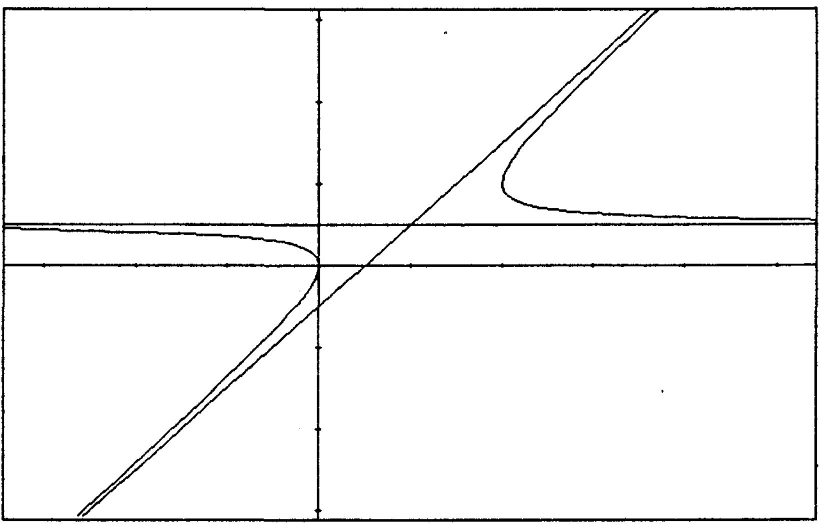


**Рис. 28**

«На глаз» видно, что вторую кривую построить проще, чем первую, во всяком случае, быстрее, так как первую кривую надо построить на трех интервалах — $(-\infty;0)$, $(0,1)$, $(1,+\infty)$, а вторую — только на двух интервалах $(-\infty;1)$ и $(1,+\infty)$.

Постройте обе кривые (рис. 28).

**Задача 3.** Построить кривые в задачах 3—14. $x^4 - 2x^2y^2 + y^3 = 0$.

*Указания*. Найдите параметрическое задание кривой. Результат: $\left[\dfrac{t^3}{2t^2-1}, \dfrac{t^4}{2t^2-1}\right]$. Выделите курсором поля алгебры знаменатель одной из дробей и найдите его нули (L ↵). Хотя нули легко определить устно, проще выполнить эти действия, чем вводить значения $t$, при которых знаменатель равен нулю. Такая ситуация встречается очень часто. Найдите асимптоты кривой.

**Задача 4.** Построить кривую $(x+y)^3 = xy$.

***Указания.*** Перейдите к параметрическому заданию кривой. Выделите знаменатель первой дроби и факторизуйте ее (F Rational), затем проделайте это со вторым знаменателем.

Вы видите, что кривую надо построить на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(-1,+\infty)$. Попробуйте построить кривую при $t \in [-0.9;10]$. Вы видите, что кривая долго не появляется. Поэтому нажмите на ESC, выполните удаление (D ↵) и задайте новые пределы, $t \in [-0.5;300000]$. Очень быстро будет начерчена часть кривой. Этот пример демонстрирует, как важно правильно определить пределы изменения параметра при построении кривой. Постройте вторую часть кривой при $t \in [-300000;-1.5]$.

***Замечание.*** Можно взять числа, меньшие по модулю 300000.

**Задача 5.** $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$.

**Задача 6.** $(x+y)^4 = ax^2y$.

**Задача 7.** $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

**Задача 8.** $(x+y)^3 = a^2(x-y)^2$.

**Задача 9.** $(x^2-y^2)(x-y)=4x^2$. **Задача 10.** $x^5+y^5=5x^2y^2$.

**Задача 11.** $y^2=\dfrac{x^2(a+x)}{a-x}$. **Задача 12.** $xy+x^2+y^2=x^3+y^3$.

**Задача 13.** $x^4+y^3-x^2y=0$. **Задача 14.** $xy=y^2+x$.

**Задача 15.** $x^3-y^3=x^2y^2$.

## ПЕРЕХОД ОТ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ К ПОЛЯРНЫМ КООРДИНАТАМ

Переход от декартовых координат к полярным осуществляется по формулам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Если вам надо решить большое число примеров по переводу функций в полярные координаты, можно ввести функции, выполняющие эту операцию.

Введем функции

$$\mathbf{FORMA\_POL}(u,x,y,r,t):=\lim_{y\to r\sin t}\lim_{x\to r\cos t}u$$

$$\mathbf{PER\_POL}(u,x,y,r,t):=\mathbf{SOLVE(FORMA\_POL}(u,x,y,r,t),r)$$

При решении задач следует иметь в виду, что форма ответа зависит от того, какие установки сделаны командой Manage Trigonometry, поэтому у некоторых примеров указано, какие установки надо делать. **M T Collect Auto** означает, что надо установить

M (Manage) T(Trigonometry):Direction:Collect Toward:Auto

**Задача 1.** Построить кривые: $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$. (M T Auto Auto)

Решение.

$\mathbf{PER\_POL}((x^2+y^2)^3-4a^2x^2y^2)$ ↵ S ↵.

Результат: $[r=0, r=-2|a\sin t\cos t|, r=2|a\sin t\cos t|]$.

Следовательно, надо построить кривую $r = 2|a\sin t\cos t|$. Постройте ее. Эта кривая известна под названием лемнискаты Бернулли.

В задачах 2—5 — установки M T Collect Auto.

**Задача 2.** $(x^2+y^2)^2 = 2x^3$.

**Задача 3.** $(x^2+y^2)^2 = 4(x^2-y^2)$.

**Задача 4.** $x^4+y^4 = a^2(x^2+y^2)$.

**Задача 5.** $(x^2+y^2)^2 = xy$.

**Задача 6.** $(x^2+y^2)^3 = 2x^3$.

**Задача 7.** $(x^2+y^2)^3 = 16x^4$.

## ПЕРЕХОД ОТ ЗАДАНИЯ КРИВОЙ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ К ПАРАМЕТРИЧЕСКОМУ ЗАДАНИЮ КРИВОЙ

При решении некоторых задач удобно перейти от полярных координат к параметрическому заданию кривой. Переход выполняется по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Для удобства выполнения операции перехода введем функцию **PER_POLPAR**.

$$\boxed{\mathbf{PER\_POLPAR}\,(r,t) := [r\cos t, r\sin t]}$$

При решении некоторых задач нужны функции $u(t) = r\cos t$, $v(t) = r\sin t$. Введем эти функции, назовем их соответственно **UR** и **VR**.

$$\boxed{\mathbf{UR}(r,t) := r\cos t} \qquad \boxed{\mathbf{VR}(r,t) := r\sin t}$$

*Замечание.* Если ввести сначала функции **UR** и **VR**, то функцию **PER_POLPAR** можно определить через них.

$$\boxed{\mathbf{PER\_POLPAR}(r,t) := [\mathbf{UR}(r,t), \mathbf{VR}(r,t)]}$$

## ЗАДАЧИ

В задачах 1—3 перейти к параметрическому заданию кривой, построить обе кривые (заданные в полярных координатах и заданные параметрически).

**Задача 1.** $r = \sin\frac{t}{3}$.

**Задача 2.** $r = \cos\frac{t}{5}$.

**Задача 3.** $r = \sin\frac{2t}{3}$.

**Задача 4.** Построить кривую $x^4 + y^4 = 4(x^2 - y^2)$ : а) перейти к полярным координатам, а затем к параметрическому заданию кривой; б) сразу перейти к параметрическому заданию кривой.

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ

Производные функции вычисляются при помощи встроенной функции **DIF**. Чтобы вычислить производную функции *u* по переменной *x* порядка *n*, надо выполнить следующее:

**DIF**$(u, x, n)$ ↵ S ↵

Если надо вычислить производную первого порядка, то $n = 1$ можно не указывать (то есть по умолчанию $n = 1$). Если вместо *n* укажем нуль, в результате указанных действий получим саму функцию.

### Примеры

В задачах 1—4 дана функция $y = \frac{x^3}{x^2 + 2}$.

**Пример 1.** Найти $y'(x)$.

Решение.

**DIF**$(x^3/(x^2+2), x)$ ↵ S ↵. Результат: $\frac{x^2(x^2+6)}{(x^2+2)^2}$.

**Пример 2.** Найти $y''(x)$.

Решение.

**DIF**$(x^3/(x^2+2),x,2)$ ↵ S ↵.

Найдите эту производную также, как производную первой производной и сравните результаты.

**Пример 3.** Найти $y'''(x)$.

**Пример 4.** Найти $y'(2)$.

Решение.

Этот пример можно решить двумя способами.

1. Найти $y'(x)$ и подставить в нее $x = 2$.

2. Функция $y'(x)$ непрерывна в точке $x = 2$, поэтому ее значение в этой точке можно найти как предел функции при $x \to 2$:

**LIM**(**DIF**$(x^3/(x^2+2),x),x,2)$ ↵ S ↵.

Решите пример обоими способами и сравните результаты.
Составьте несколько подобных примеров и прорешайте их.

В примерах 5, 6 дана функция $z = x^5y^3$.

**Пример 5.** Найти: а) $z'_x(x,y)$, б) $z'_y(x,y)$, в) $z''_{xy}(x,y)$, г) $z^{(5)}_{x^3y^2}(x,y)$.

Решение.

а) **DIF**$(x^5y^3,x)$ ↵ S ↵;

б) **DIF**$(x^5y^3,y)$ ↵ S ↵;

в) **DIF**(**DIF**$(x^5y^3,x),y)$ ↵ S ↵;

г) **DIF**(**DIF**$(x^5y^3,x,3),y,2)$ ↵ S ↵.

**Пример 6.** Найти $z'''_{xy^2}(5,6)$.

Решение.

**LIM**(**LIM**(**DIF**(**DIF**$(x^5y^3,x),y,2),y,6),x,5)$ ↵ S ↵.

**Пример 7.** Удовлетворяет ли функция $z = e^{x/y}$ равенству $yz''_{xy} = z'_y - z'_x$?

**Пример 8.** Удовлетворяет ли функция $z = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ равенству $xz''_{xx} + yz''_{xy} = zz'_x$?

## Вычисление производных функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически уравнениями $x = u(t)$, $y = v(t)$. Производная этой функции $y'_x$ вычисляется по формуле $y'_x = \dfrac{v'_t}{u'_t}$.

Введем функцию **PROIZ_P1** для вычисления этой производной.

$$\boxed{\mathbf{PROIZ\_P1}(u,v,t) := \mathbf{DIF}(v,t)/\mathbf{DIF}(u,t)}$$

Введем функцию для нахождения значения производной $y'_x\big|_{t=t_0}$. Назовем ее **ZN_PROIZ_P1**.

$$\boxed{\mathbf{ZN\_PROIZ\_P1}(u,v,s,t) := \lim_{t\to s} \mathbf{PROIZ\_P1}(u,v,t)}$$

### Примеры

**Пример 1.** Найти производную функции $y'_x$, если $x(t) = \dfrac{t^3}{t^2+1}$, $y(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$.

Решение.

$\mathbf{PROIZ\_P1}\left(\dfrac{t^3}{t^2+1}, \dfrac{t}{t^2+1}\right)$ ↵ S ↵. Результат: $-\dfrac{t^2-1}{t^2(t^2+3)}$.

**Пример 2.** Найти $y'_x$ при $t = 2$ для функции, данной в предыдущем примере.

Решение.

$\mathbf{ZN\_PROIZ\_P1}\left(\dfrac{t^3}{t^2+1}, \dfrac{t}{t^2+1}, 2\right)$ ↵ S ↵

**Пример 3.** Найти производную функции $y'_x$, если $x(s)=s^2$, $y(s)=s^3+1$.

Решение.

**PROIZ_P1**$(s^2,s^3+1,s)$ ↵ S ↵

Известно, что производную $y''_{xx}$ функции (1) можно найти по формуле $y''_{xx}=(y'_x)'_t\,/\,u'_t$, где $y'_x=\dfrac{v'_t}{u'_t}$.

Введем функцию **PROIZ_P2**, определяющую производную $y''_{xx}$ функции $[u(t),v(t)]$.

| |
|---|
| **PROIZ_P2**$(u,v,t)$ := **DIF**(**DIF**$(v,t)$ / **DIF**$(u,t),t)$ / **DIF**$(u,t)$ |

Введем также функцию **ZN_PROIZ_P2**, определяющую значение $y''_{xx}$ при $t=s$.

| |
|---|
| **ZN_PROIZ_P2**$(u,v,s,t)$ := LIM(**PROIZ_P2**$(u,v,t),t,s)$ |

**Задание**. Найдите производные $y''_{xx}$ для функций, рассмотренных выше.

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ. УРАВНЕНИЯ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ К КРИВОЙ, ЗАДАННОЙ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Известно, что геометрический смысл производной $f'(x_0)$ состоит в том, что $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной к кривой $y=f(x)$ в ее точке с абсциссой $x_0$, то есть в точке $(x_0,f(x_0))$.

Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $(x_0,f(x_0))$ есть $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ или $y=f'(x_0)x+f(x_0)-f'(x_0)x_0$.

Соответствующее уравнение нормали есть $y=f(x_0)-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$ или $y=-\dfrac{1}{f'(x_0)}x+f(x_0)+\dfrac{x_0}{f'(x_0)}$.

Введем функции: **K1** — определяет угловой коэффициент касательной к кривой $y = u(x)$ в точке с абсциссой $x = t$, **KAS1** — определяет уравнение касательной к кривой $y = u(x)$ в этой точке, **NOR1** — уравнение нормали

$$\boxed{\mathbf{K1}(u,t,x,y) := \lim_{x \to t} \frac{d}{dx} u}$$

$$\boxed{\mathbf{KAS1}(u,t,x,y) := y = \mathrm{K1}(u,t,x,y)x + \lim_{x \to t} u - \mathrm{K1}(u,t,x,y)t}$$

$$\boxed{\mathbf{NOR1}(u,t,x,y) := y = \lim_{x \to t} u - \frac{x}{\mathrm{K1}(u,t,x,y)} + \frac{t}{\mathrm{K1}(u,t,x,y)}}$$

Через $u$ обозначена функция $y = u(x)$, роль $x_0$ играет $t$.

При решении многих задач приходится находить свободный член уравнения касательной, поэтому введем функцию, находящую его.

$$\boxed{\mathbf{SVCH\_KAS1}(u,t,x,y) := \lim_{x \to t} u - \mathrm{K1}(u,t,x,y)t}$$

**Задача 1.** На линии $y = x^3 - 3x^2$ найти точки, в которых касательные параллельны оси абсцисс, и уравнения соответствующих касательных.

Решение.

1. Угловой коэффициент искомых касательных должен равняться нулю. Следовательно, мы должны найти нули производной данной функции.

**DIF**($x^3 - 3x^2$,$x$) ↵ L ↵. Результат: $x = 2$, $x = 0$.

Можно также решить уравнение

**K1**($x^3 - 3x^2$,$x$) = 0 ↵ S ↵ L ↵. Результат: $x = 2$, $x = 0$.

2. Найдем уравнения касательных при найденных значениях $x$.

**KAS1**($x^3 - 3x^2$,0) ↵ S ↵. Результат: $y = 0$.

**KAS1**($x^3 - 3x^2$,2) ↵ S ↵. Результат: $y = -4$.

Уравнения касательных можно найти также, подставив в уравнение данной функции $x = 0$ и $x = 2$, но в тех случаях, когда это трудно проделать устно, быстрее воспользоваться функцией **KAS1**.

Ответ: при $x = 0$ $y = 0$ и при $x = 2$ $y = -4$.

**Задача 2.** Найти точку пересечения касательных к кривой $y = \frac{2x^2+3}{4(x-2)}$ в точках с абсциссами $x = 0$ и $x = 3$.

Р е ш е н и е.

1. Найдем уравнение касательной к данной кривой в точке $x = 0$:

**KAS1** $\left(\frac{2x^2+3}{4(x-2)},0\right)$ ↲ S ↲. Результат: $y = -\frac{3x}{16}-\frac{3}{8}$.

2. Найдем уравнение касательной к данной кривой в точке $x = 3$:

**KAS1** $\left(\frac{2x^2+3}{4(x-2)},3\right)$ ↲ S ↲. Результат: $y = 12-\frac{9x}{4}$.

3. Решим систему уравнений

$\left[y = -\frac{3x}{16}-\frac{3}{8}, y = 12-\frac{9x}{4}\right]$ ↲ L ↲. Результат: $\left[x = 6, y = -\frac{3}{2}\right]$.

Постройте кривую и обе касательные (Scale 2). Установите «+» в точку (6; –3/2): Move $x$: = 6, $y$: = –3/2.

Ответ: $\left(6; -\frac{3}{2}\right)$.

**Задача 3.** Построить кривую $y = \frac{x^3-52x-96}{10}$ и касательную к ней: а) параллельную прямой $y = (x + 5)/2$; б) перпендикулярную прямой $y = 5x$.

Найти точки касания.

Р е ш е н и е.

а) Прямые параллельны, если их угловые коэффициенты равны. Следовательно, угловой коэффициент искомой касательной должен быть равен 1/2.

1. Пусть абсцисса точки касания равна $t$, приравняем угловой коэффициент касательной к 1/2.

**K1** $\left(\dfrac{x^3-52x-96}{10}\right)=\dfrac{1}{2}$ ↵ S ↵. Результат: $\dfrac{3t^2-52}{10}=\dfrac{1}{2}$ L ↵.

Результат: $t=\sqrt{19}$ и $t=-\sqrt{19}$.

2. Найдем уравнение касательной при $t=\sqrt{19}$ и $t=-\sqrt{19}$.

**KAS1** $\left(\dfrac{x^3-52x-96}{10},\sqrt{19}\right)$ ↵ S ↵.

Результат: $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{19\sqrt{19}}{5}-\dfrac{48}{5}$.

**KAS1** $\left(\dfrac{x^3-52x-96}{10},-\sqrt{19}\right)$ ↵ S ↵.

Результат: $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{19\sqrt{19}}{5}-\dfrac{48}{5}$.

Найдите координаты точек касания. Сделайте чертеж, установите указатель «+» в точки с найденными координатами и зрительно убедитесь в том, что эти точки — точки касания кривой и найденных прямых.

б) Две прямые перпендикулярны, если произведение их угловых коэффициентов равно –1, следовательно, угловой коэффициент искомой касательной должен быть равен –1/5.

1. **K1** $\left(\dfrac{x^3-52x-96}{10}\right)=-\dfrac{1}{5}$ ↵ S ↵ L ↵.

Результат: $t=-\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$ и $t=\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$.

2. Найдите уравнения касательных при найденных значениях аргумента, координаты точки касания и сделайте чертеж.

**Задача 4.** Построить касательные к кривой $y=2x-\dfrac{4(2x-1)}{x^2+1}$, параллельные ее асимптоте, и соответствующие им нормали.

Р е ш е н и е.

1. Данная функция определена на всей числовой прямой, следовательно, кривая не имеет вертикальных асимптот. Проверим, есть ли наклонные асимптоты:

**ASN_R**$\left(2x-\dfrac{4(2x-1)}{x^2+1}\right)$ ↲ S ↲. Результат: $y = 2x$.

**ASN_L**$\left(2x-\dfrac{4(2x-1)}{x^2+1}\right)$ ↲ S ↲. Результат: $y = 2x$.

Воспользуемся условием параллельности прямых — угловой коэффициент искомой касательной должен равняться 2.

2. Угловой коэффициент касательной при $x = t$ приравняем к 2 и решим полученное уравнение.

**K1**$\left(2x-\dfrac{4(2x-1)}{x^2+1}\right)=2$ ↲ S ↲ F4 – 2 ↲ L ↲.

Результат: $t=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ и $t=\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{2}$.

3. Найдите уравнения касательных при найденных значениях аргумента. Результат: $y=2x+2\sqrt{5}+2$ и $y=2x-2\sqrt{5}+2$.

4. Найдите соответствующие найденным касательным нормали. Результат: $y=-\dfrac{x}{2}\pm\dfrac{3\sqrt{5}}{4}+\dfrac{13}{4}$.

Постройте данную кривую (вместе с ее асимптотой!), найденные касательные и нормали. Передвигая «+» стрелками, установите его в точку касания, найдите ее координаты, затем найдите координаты точки аналитически и сравните результаты.

Ответ: касательные $y=2x+2\sqrt{5}+2$ и $y=2x-2\sqrt{5}+2$, соответствующие им нормали $y=-\dfrac{x}{2}\pm\dfrac{3\sqrt{5}}{4}+\dfrac{13}{4}$.

**Задача 5.** Построить касательную и нормаль к кривой $y=-x^2+4x-1$, проходящие через точку (3; 4).

Р е ш е н и е.

1. Убедитесь в том, что кривая не проходит через данную точку.

2. Найдем уравнение касательной при $x = t$.

**KAS1** $(-x^2+4x-1)$ ↵ S ↵. Результат: $y = -2x(t-2)+t^2-1$.

3. Касательная должна проходить через точку (3; 4). Подставим в полученное уравнение $x = 3$, $y = 4$.

M S $x := 2$ $y := 4$ ↵ S L ↵. Результат: $t = 3-\sqrt{2}$ и $t = 3+\sqrt{2}$.

4. Найдите уравнения касательных и нормалей при найденных значениях аргумента.

Сделайте рисунок, поставьте «+» в точки касания, найдите их координаты, проверьте результаты.

**Задача 6**. Построить общие касательные к параболам $y = -2x^2+12x-17$ и $y = x^2+4x+2$ и соответствующие им нормали.

Решение.

1. Найдем угловой коэффициент касательной к первой параболе при $x = t$.

**K1** $(-2x^2+12x-17)$ ↵ S ↵. Результат: $12-4t$.

2. Найдем угловой коэффициент касательной ко второй параболе при $x = w$.

**K1** $(x^2+4x+2, w)$ ↵ S ↵. Результат: $2w+4$.

3. Угловые коэффициенты этих касательных равны. Составим уравнение $12-4t = 2w+4$.

4. Выразим из этого уравнения какую-либо из переменных, например, $t$.

L $t$ ↵. Результат: $t = -\dfrac{w-4}{2}$.

5. Найдем свободные члены касательных и приравняем их.

**SVCH_KAS1** $(-2x^2+12x-17)$ ↵ S ↵. Результат: $2t^2-17$.

**SVCH_KAS1** $(x^2+4x+2, w)$ ↵ S ↵. Результат: $-w^2+2$.

Следовательно, $2t^2-17 = -w^2+2$.

6. В полученное равенство подставим $t = -\dfrac{w-4}{2}$ и решим уравнение.

M S $t := -\dfrac{w-4}{2}$ ↵ S ↵ L ↵.

Результат: $w = \dfrac{4}{3}-\dfrac{\sqrt{82}}{3}$, $w = \dfrac{\sqrt{82}}{3}+\dfrac{4}{3}$.

7. Найдите соответствующие значения переменной $t$.

8. Найдите уравнения касательных к кривым при найденных значениях аргумента и убедитесь в том, что они совпадают. Найдите соответствующие уравнения нормалей. Постройте рисунок. Чтобы видеть обе точки касания, выберите разный масштаб по осям абсцисс и ординат.

**Задача 7.** Найти уравнения всех тех касательных к графику функции $y = \sqrt{1-3x^2}$, каждая из которых вместе с осями ограничивает треугольник с площадью $1/\sqrt{3}$.

Решение.

Уравнение кривой можно переписать в виде $3x^2 + y^2 = 1$, где $1-3x^2 \geq 0$, $y \geq 0$. Следовательно, кривая — часть эллипса, его параметрическое задание $\left[\dfrac{\cos s}{\sqrt{3}}, \sin s\right]$.

1. Пусть $t$ — абсцисса точки касания, найдем уравнение касательной:

**KAS1**($\sqrt{1-3x^2}$) ↲ S ↲. Результат: $y = \sqrt{1-3x^2} + \dfrac{3t^2-3tx}{\sqrt{1-3x^2}}$. (1)

2. В полученном уравнении положим $x = 0$.

M S $x$: = 0 ↲ $y$ ↲ $t$ ↲ S ↲. Результат: $y = \sqrt{1-3t^2} + \dfrac{3t^2}{\sqrt{1-3t^2}}$. (2)

3. В уравнении касательной положим $y = 0$ и из полученного равенства выразим $x$.

M S $x$ ↲ $y$: = 0 ↲ $t$ ↲ L ↲ $x$ ↲. Результат: $x = \dfrac{1}{3t}$. (3)

4. Произведение модулей правых частей полученных равенств по условию задачи равно $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. То есть должно выполняться равенство $\left|\sqrt{1-3x^2} + \dfrac{3t^2}{\sqrt{1-3t^2}}\right|\left|\dfrac{1}{3t}\right| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Для быстрого ввода этого равенства выделим правую часть равенства (2) и скопируем ее в строку ввода при помощи клавиши **F4**. То же проделаем с равенством (3). В последнем случае можно копировать при помощи любой из клавиш

**F3** или **F4**. Приравняем произведение к $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Знаки модулей можно опустить, так как при решении этого уравнения в дальнейшем будем возводить равенство в квадрат.

5. Возведем полученное равенство в квадрат и решим полученное уравнение:

**F4^2** S ↵ L ↵. Результат: $t = -\frac{\sqrt{6}}{6}$, $t = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

6. Найдем уравнения касательных при найденных значениях $t$.

Это можно сделать двумя способами: подставить эти значения в равенство (1) или снова использовать функцию KAS1:

**KAS1**$\left(\sqrt{1-3x^2}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ ↵ S ↵. Результат: $y = \sqrt{3}x + \sqrt{2}$.

**KAS1**$\left(\sqrt{1-3x^2}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ ↵ S ↵. Результат: $y = \sqrt{2} - \sqrt{3}x$.

По виду уравнений ясно, что прямые симметричны относительно оси ординат, как мы и ожидали.

Постройте рисунок — эллипс и найденные касательные. Сделайте проверку. Найдите точки касания, установите в них (по очереди) указатель «+».

**Задача 8.** Найти функции $b(t)$ и $a(t)$, при которых прямая $y = \frac{x}{2} - 1$ является касательной ко всем параболам $y = x^2 + bx + c$. Построить рисунок.

Решение.

1. Пусть $t$ — абсцисса точки касания. По условию угловой коэффициент касательной к параболе должен быть равен 1/2. Воспользуемся этим:

**K1**$(x^2 + bx + c) = \frac{1}{2}$ ↵ S ↵ L ↵ b ↵. Результат: $b = \frac{1}{2} - 2t$.

2. Найдем свободный член касательной и приравняем его к $-1$.

**SVCH_KAS1**$(x^2 + bx + c) = -1$ ↵ S ↵.

Результат: $c - t^2 = -1$ L $c$ ↵. Результат: $c = t^2 - 1$.

Таким образом, $b(t) = -\frac{4t-1}{2}$, $c(t) = t^2 - 1$.

3. В уравнение параболы вместо $b$ и $c$ подставим полученные выражения. Результат: $y = x^2 - \frac{4t-1}{2}x + t^2 - 1$.

Постройте прямую $y = \frac{x}{2} - 1$ и несколько парабол. Например, $t = 0 \Rightarrow y = x^2 + \frac{x}{2} - 1$; $t = 1 \Rightarrow y = x^2 - \frac{3x}{2}$; $t = -1 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = x^2 + \frac{5x}{2}$.

Ответ: $b(t) = -\frac{4t-1}{2}$, $c(t) = t^2 - 1$.

**Задача 9.** Решить задачу, аналогичную задаче 8, для параболы $y = ax^2 + bx + c$ и прямой $y = -\frac{x}{3} + 1$, $b = b(a,t)$, $c = c(a,t)$.

Ответ: $y = ax^2 - \frac{6at+1}{3}x + at^2 + 1$.

**Задача 10.** При каком $a$ прямая $y = 2x + 1$ является касательной к кривой $y = \sqrt{4x^2 + a} + 3x$?

Решение.

Угловой коэффициент касательной приравняем к 2, а свободный член — к 1.

1. **K1** $(\sqrt{4x^2 + a} + 3x) = 2$ ↵ S ↵ L $a$ ↵ F4^2L $a$ ↵.

Результат: $a = 12\,t^2$.

2. **SVCH_KAS1** $(\sqrt{4x^2 + a} + 3x) = 1$ ↵ S ↵ MS $a{:}= 12t^2$ L ↵.

Результат: $3|t| = 1$.

Следовательно, $a = \frac{4}{3}$.

3. Сделайте чертеж и найдите координаты точки касания.

Ответ: при $a = \frac{4}{3}$, координаты точки касания $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

**Задача 11.** На кривой $y = x^3 - 3x + 5$ найти точки, в которых касательная: а) перпендикулярна прямой $y = 9x + 7$; б) составляет с положительным направлением оси абсцисс угол $\frac{\pi}{4}$.

**Задача 12.** Построить касательные к кривой $y = x^3 - 3x - 8$, проходящие через точку $(-1;-5)$.

**Задача 13.** Построить окружность $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$, касательные и нормали к ней в точках пересечения окружности с осями координат.

Решение.

Окружность пересекает ось абсцисс при $x = 2\sqrt{2} + 2$ и $x = 2 - 2\sqrt{2}$, ось ординат — при $x = 0$ в точках $(0;1+\sqrt{5})$ и $(0;1-\sqrt{5})$. Так как $1+\sqrt{5} > 0$, уравнение части дуги окружности, которой принадлежит точка $(0;1+\sqrt{5})$, есть $y = 1 - \sqrt{9-(x-2)^2}$. Так как $1-\sqrt{5} < 0$, уравнение части дуги окружности, которой принадлежит точка $(0;1-\sqrt{5})$, есть $y = 1 + \sqrt{9-(x-2)^2}$.

1. Найдем касательные к окружности в точках ее пересечения с осью абсцисс.

**KAS1** $(1-\sqrt{9-(x-2)^2}, 2-2\sqrt{2})$ ↲ S ↲.

Результат: $y = -2\sqrt{2}x + 4\sqrt{2} - 8$.

**KAS1** $(1-\sqrt{9-(x-2)^2}, 2+2\sqrt{2})$ ↲ S ↲.

Результат: $y = 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2} - 8$.

2. Найдем касательные к окружности в точках ее пересечения с осью ординат.

**KAS1** $(1-\sqrt{9-(x-2)^2}, 0)$ ↲ S ↲.

Результат: $y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}x - \sqrt{5} + 1$.

**KAS1** $(1+\sqrt{9-(x-2)^2}, 0)$ ↲ S ↲.

Результат: $y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x + \sqrt{5} + 1$.

Уравнения нормалей найдите самостоятельно. Сделайте чертеж.

Окружность задайте параметрически $[2+3\cos t, 1+\sin t]$.

**Задача 14.** Построить окружность $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ и касательные к ней, проходящие через точку (3;3), найдите координаты точки касания.

Сместите все линии так, чтобы центр окружности находился в точке (0; 0). Укажите новые уравнения касательных, координаты точек касания и координаты точек пересечения новых касательных.

Ответ: первоначальные уравнения касательных $y=\left[\pm\frac{6\sqrt{5}}{5}-2\right]x\mp\frac{18\sqrt{5}}{5}+9$, окружность надо сдвинуть влево на 1 единицу и вверх на 2 единицы.

**Задача 15.** Найти $a$, при которых прямая $y=5-x$ является касательной к кривой $y=x-\sqrt{x^2-2x+a}$. Укажите координаты точки касания.

Ответ: $a=-2$, касание в точке (3; 2).

**Задача 16.** Найти уравнение касательной к кривой $y=(2x+3)\sqrt{2x+3}+x^2$, не пересекающей прямую $y=x$.

Ответ: $y=x+3$, касание в точке (–1; 2).

**Задача 17.** Решить задачу, аналогичную задаче 16, для кривой $y=(1-x)^{\frac{3}{2}}-x^2$ и прямой $y=3x$.

**Задача 18.** Найти уравнения общих касательных к двум кривым, укажите координаты точек касания, найдите соответствующие уравнения нормалей. Сделайте рисунки.

а) $y=x^2-2x+5$ и $y=x^2+2x-1$;

б) $y=x^2+x+1$ и $y=\frac{x^2+3}{2}$;

в) $y=x^2-x+1$ и $y=2x^2-x+0{,}5$.

**Задача 19.** Точка (1; –2) принадлежит параболе $y = x^2 + ax + b$, прямая $y = 2(x - 4)$ касается этой параболы. Построить параболу и прямую, которая касается ее в данной точке.

Ответ: две параболы $y = x^2 + 4x - 7$ и $y = x^2 - 4x + 1$.

**Задача 20.** Прямая $y = x - 1$ касается параболы $y = ax^2 + bx + c$ в точке $M(1;-3)$. Построить параболу и эту касательную.

**Задача 21.** Прямая касается параболы $y = ax^2 + bx + c$ в точке $M(2;-4)$. Построить эту прямую и параболу, если известно, что $y(0) = 3$, а касательная к параболе , которая касается ее в точке с абсциссой, равной 4, проходит через точку $N\left(-\frac{1}{6};-12\right)$.

**Задача 22.** Найти тангенс угла между касательными к кривой $y = x^2 - 4x + 3$, проходящими через точку $\left(3;-\frac{1}{2}\right)$.

Р е ш е н и е.

1. Найдем уравнение касательной к данной кривой, проходящей через точку с абсциссой $t$.

**KAS1**$(x^2 - 4x + 3)$ ↵ S ↵. Результат: $y = x(2t - 4) - t^2 + 3$.

2. Найдем значения $t$, при которых касательные к данной кривой проходят через точку $\left(3;-\frac{1}{2}\right)$. Для этого в полученное равенство подставим $x = 3$ и $y = -\frac{1}{2}$ (M S) и решим полученное уравнение (L ↵). Результат: $t = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $t = \frac{\sqrt{2}}{2} + 3$.

3. Найдем тангенс угла между касательными к кривой при найденных значениях $t$.

**TG_UG_PR**$\left(\text{K1}\left(x^2 - 4x + 3, 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \textbf{K1}\left(x^2 - 4x + 3, \frac{\sqrt{2}}{2} + 3\right)\right)$ ↵ S ↵.

Результат: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Мы решили задачу, не находя касательных к кривой. Если надо построить рисунок, то придется определить эти уравнения, поэтому можно сначала их найти, а затем найти тангенс угла между ними. Проделайте это самостоятельно и постройте рисунок.

## Угол между кривыми

***Углом между кривыми*** в точке их пересечения называется угол между касательными и кривыми в этой точке.

Ранее мы ввели функции **TG_UGPR** и **UG_PR**, определяющие тангенс угла между двумя прямыми и сам угол между прямыми. При определении угла между двумя кривыми можно использовать эти функции. При решении этой задачи надо сначала найти точку пересечения кривых, затем найти угловые коэффициенты касательных к кривым в этой точке, после чего воспользоваться одной из этих функций. Можно ввести функции для определения угла между кривыми без предварительного определения угловых коэффициентов.

$$\boxed{\mathbf{T\_UG}(u,v,t,x) := \left|\frac{\mathrm{K1}(u,t,x)-\mathrm{K1}(v,t,x)}{1+\mathrm{K1}(u,t,x)\mathrm{K1}(v,t,x)}\right|}$$

$$\boxed{\mathbf{UG\_KR}(u,v,t,x) := \mathrm{ATAN}(\mathrm{T\_UG}(u,v,t,x))}$$

Функция **T_UG** определяет тангенс угла между кривыми, **UG_KR** — сам угол между кривыми. Здесь $u$ и $v$ — заданные функции, $t$ — абсцисса точки пересечения.

> ***Замечание***. Эти функции можно использовать и для нахождения углов между прямыми.

**Задача 1.** Найти угол между кривыми $y = x^2$ и $y = \dfrac{1}{x}$ в точке пересечения.

Решение.

1. Кривые пересекаются в точке (1; 1).

2. **UG_KR**$(x^2, 1/x, 1)$ ↲ S ↲. Результат: $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$ X ↲.

Результат: 1.24904.

Ответ: 1.24904.

**Задача 2.** Найти угол между кривыми $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ и $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ в точке их пересечения.

Р е ш е н и е.

1. Данные кривые есть эллипсы, симметричные относительно осей координат. Поэтому достаточно найти угол между ними в точке их пересечения в первом координатном углу. Найдите эту точку. Это точка $\left(\frac{12}{5};\frac{12}{5}\right)$.

2. Выразим $y$ из обоих равенств, считая $y>0$. Результат: $y=\frac{3\sqrt{16-x^2}}{4}$ и $y=\frac{4\sqrt{9-x^2}}{3}$.

3. Найдем угол между кривыми.

**UG_KR**$\left(\frac{3\sqrt{16-x^2}}{4},\frac{4\sqrt{9-x^2}}{3},\frac{12}{5}\right)$ ↵ S ↵.

Результат: $\operatorname{arctg}\frac{175}{288}$ X ↵. Результат: 0.56017.

Ответ: 0.56017.

# ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ

## Нахождение экстремумов функций

Точка $x_0$ называется ***точкой строгого локального максимума функции*** $y=f(x)$, если существует окрестность этой точки, для всех точек которой, отличных от точки $x_0$, верно неравенство $f(x)<f(x_0)$.

Это определение в математических символах записывается так:

$$\exists U(x_0)\ \forall x\in U(x_0)\colon f(x)<f(x_0)$$

Если в окрестности этой точки $f(x)\le f(x_0)$, точка $x_0$ называется ***точкой нестрогого максимума.***

Если $\exists U(x_0)\forall x\in \overset{0}{U}(x_0): f(x) > f(x_0)$, точка $x_0$ называется ***точкой строгого локального минимума функции*** $y = f(x)$.

Слово «локальный» будем опускать, понимая под максимумами и минимумами функции локальные максимумы и минимумы.

Точки максимума и минимума называются ***точками экстремума функции.***

***Необходимое условие экстремума.*** Если точка $x_0$ является точкой экстремума функции $y = f(x)$, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.

Достаточные условия наличия строгого экстремума.

1) ***с использованием первой производной.***

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0$, кроме, может быть, самой точки $x_0$, в которой функция непрерывна. Тогда:

а) если $\forall x < x_0: f'(x) < 0$ и $\forall x > x_0: f'(x) > 0$, точка $x_0$ является точкой строгого минимума;

б) если $\forall x < x_0: f'(x) > 0$ и $\forall x > x_0: f'(x) < 0$, точка $x_0$ является точкой строгого максимума.

В случае а) говорят, что при переходе через точку $x_0$ производная меняет знак с минуса на плюс, в случае б) при переходе через точку $x_0$ производная меняет знак с плюса на минус;

2) ***с использованием производных высших порядков.***

Пусть функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ производные до $n$ $(n \in \mathrm{N})$ включительно. Тогда, если $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то при четном $n$ точка $x_0$ является точкой строгого экстремума, причем точкой максимума, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, и точкой минимума, если $f^{(n)}(x_0) > 0$.

В частности, $\left.\begin{matrix} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ в точке $x_0$ строгий максимум,

$\left.\begin{matrix} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ в точке $x_0$ строгий минимум.

В дальнейшем под максимумом и минимумом будем понимать строгие экстремумы, поэтому слово «строгий» будем опускать.

## ЗАДАЧИ

В задачах 1—5 найти экстремумы данных функций.

**Задача 1.** $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$.

Решение.

1. Найдем производную данной функции.

**DIF**$(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5, x)$ ↵ S ↵

2. Разложим полученное выражение на множители:

F ↵ Rational ↵. Результат: $4(x-1)^3$.

Следовательно, производная данной функции при переходе через точку $x = 1$ меняет знак с минуса на плюс, следовательно, в точке $x = 1$ функция имеет минимум.

3. Вычислите значение функции при $x = 1$.

4. Постройте график функции, установите указатель «+» в найденную точку графика, зрительно убедитесь в том, что это точка минимума.

Ответ: $y_{\min} = y(1) = 4$.

**Задача 2.** $y = (x^3 - 10)(x + 5)^2$.

Решение.

1. **DIF**$((x^3 - 10)(x+5)^2, x)$ ↵ S ↵ F ↵ Rational ↵.

Результат: $5(x-1)(x+2)^2(x+5)$. Производная меняет знак при переходе через точки $x = 1$ и $x = -5$. Определите характер экстремума при найденных $x$.

2. Найдите значения функции в полученных точках.

3. Постройте кривую и отметьте на ней (постройте) найденные точки. Зрительно убедитесь в том, что это действительно точки экстремума.

**Задача 3.** $y = (x+2)^2(x-3)^3$.

**Задача 4.** $y = \sin^3 x + \cos^3 x$.

Решение.

1. Найдите производную функции.

2. Перед разложением на множители установите M T Direction:Auto Toward:Auto .

3. Разложите на множители: F ↵ Trivial ↵.

Результат: $-3\sin x \cos x(\cos x - \sin x)$.

4. Выделите курсором первый множитель $\sin x$ и нажмите L ↲. Результат: $x = 0$. Аналогично поступите с каждым из множителей.

Продолжите решение задачи самостоятельно. Постройте график функции и отметьте на нем точки экстремумов, лежащие на промежутке $[0,2\pi)$.

**Задача 5.** Найти экстремумы кривой $\left[\dfrac{t^3}{t^2+1}, \dfrac{t^3-2t^2}{t^2+1}\right]$.

Решение.

1. Найдите асимптоты данной кривой. У вас должна получиться прямая $y = x - 2$. Постройте кривую и ее асимптоту. Вы видите, что кривая имеет точку максимума и точку минимума. Точка максимума — точка заострения.

2. Найдем производную $y'(x)$.

$$\mathbf{PROIZ\_P1}\left(\frac{t^3}{t^2+1}, \frac{t^3-2t^2}{t^2+1}\right)$$ ↲ S ↲. Результат: $\dfrac{t^3+3t-4}{t\left(t^2+3\right)}$ L ↲.

Результат: $t = 1$. Следовательно, производная меняет знак при $t = 1$ и при $t = 0$.

3. Найдем точки кривой, соответствующие найденным значениям параметра $t$. Для этого сделайте подстановки в данное параметрическое задание кривой.

Результат: $\left[\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right]$, $[0,0]$.

Отметьте на кривой эти точки.

*Замечание.* Можно найти точки, в которых производная $y'_x$ меняет знак, не используя функцию **PROIZ_P1**, находя производные $y'_t$ и $x'_t$ и по ним определяя искомые точки.

**Задача 6.** Найти экстремумы кривой $\left[\dfrac{1}{t(t+1)}, \dfrac{(t+1)^2}{t}\right]$ при $t>0$.

**Задача 7.** Найти экстремумы кривой $x^3 + y^3 = 3x^2$.

*Указания.* Перейдите к параметрическому заданию кривой. Найдите асимптоты кривой, постройте кривую и ее асимптоты. Зрительно определите наличие экстремумов кривой. Найдите эти экстремумы аналитически.

Ответ: $y_{\min} = y(0) = 0$, $y_{\max} = y(2) = \sqrt[3]{4}$.

## Нахождение точек перегиба кривой

Говорят, что график функции $y = f(x)$ является ***выпуклым*** на интервале $(a, b)$, если он в пределах данного интервала лежит не выше любой своей касательной. Если же в пределах этого интервала график функции лежит не ниже любой своей касательной, говорят, что график функции является ***вогнутым*** на этом интервале.

Точка $M(x_0, f(x_0))$ кривой $y = f(x)$ называется ***точкой перегиба*** этой кривой, если существует такая окрестность точки $x_0$ оси абсцисс, в пределах которой кривая справа и слева от точки $x_0$ имеет разные направления выпуклости. В этом случае говорят также, что точка $x_0$ является точкой перегиба функции $y = f(x)$.

Если $(x_0, f(x_0))$ — точка перегиба графика функции $y = f(x)$, то этот график переходит с одной стороны касательной к нему в этой точке на другую сторону этой касательной.

**Необходимое условие существования точки перегиба.** Если точка $(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба функции $y = f(x)$, то либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует.

**Достаточные условия существования точки перегиба:**

**1) *с использованием второй производной.***

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$ и дважды дифференцируема в некоторой окрестности этой точки, кроме, может быть, самой точки $x_0$. Тогда точка $(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, если при переходе через точку $x_0$ вторая производная меняет знак;

**2) *с использованием производных высших порядков.***

Пусть функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ производные до порядка $n$ $(n > 2)$ включительно и пусть $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда если $n$ — нечетное число, то $x_0$ — точка перегиба кривой $y = f(x)$, если же $n$ — четное число, то $x_0$ не является точкой перегиба.

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Доказать, что график функции $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

Решение.

1. Найдите $y''_{xx}$ и разложите ее на множители, найдите нули производной: (F ↵ Rational ↵ L ↵). Эта производная меняет знак при переходе через точки $x = 1$, $x = -\sqrt{3} - 2$, $x = \sqrt{3} - 2$.

2. Введите $\left[x, \dfrac{x+1}{x^2+1}\right]$ и сделайте подстановки $x = 1$, $x = -\sqrt{3} - 2$, $x = \sqrt{3} - 2$.

Результаты: $[1,1]$, $\left[-\sqrt{3} - 2, \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right]$, $\left[\sqrt{3} - 2, \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}\right]$.

3. Постройте кривую и отметьте на ней найденные точки. Зрительно убедитесь в том, что это точки перегиба, и они могут лежать на одной прямой.

4. Найдите уравнение прямой, проходящей через две найденные точки, и убедитесь в том, что третья точка лежит на этой прямой. Постройте эту прямую.

5. Найдите уравнения касательных к графику функции, проходящие через точки перегиба. Постройте эти касательные. Какое свойство кривой относительно построенных касательных можно отметить?

**Задача 2.** Найти точки перегиба графика функции $y = (x^2 + 1)e^x$. Постройте кривую и касательные к ней, проходящие через точки перегиба.

**Задача 3.** Найти точки перегиба графика функции $y = x^2 e^{-4x}$. Постройте кривую и касательные к ней, проходящие через точки перегиба.

*Указание.* При построении кривой установите Scale x:0.5 y:0.1.

**Задача 4.** Является ли точка $x = 0$ точкой перегиба графика функции $y = \dfrac{x^2}{2} - \operatorname{tg} x + \sin x$?

Решение.

Воспользуемся вторым достаточным признаком существования точки перегиба (с использованием производных высших порядков). Найдем производные функции в данной точке первого, второго и т.д. порядков, пока очередная производная не будет отлична от нуля. Мы видим, что $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{(4)}(0) = 0$, а $y^{(5)}(0) = -15 \neq 0$. $n = 5$ —

нечетное число, следовательно, точка (0,0) — точка перегиба графика данной функции.

*Замечание.* Эту задачу удобно решать, используя функцию **VECTOR** или функцию **TAYLOR**. В пункте «Степенные ряды. Ряд Тейлора» рассмотрено второе решение этой задачи.

**Задача 5.** Найти точки перегиба кривой $\left[\frac{t^2}{t-1}, \frac{t^3}{t-1}\right]$ при $t > 2$.

Решение.

1. Постройте кривую и ее асимптоту. Попытайтесь зрительно определить число точек перегиба кривой.

2. Найдем $y''_{xx}$.

**PROIZ_P2**$\left(\frac{t^2}{t-1}, \frac{t^3}{t-1}\right)$ ↵ S ↵ F ↵ Rational ↵.

Результат: $\frac{2(t-3)(t-1)^3}{t(t-2)^3}$.

Производная меняет знак при $t = 0$, $t = 2$, $t = 3$ (в точке $t = 1$ функции $u(t)$ и $v(t)$ не определены). По условию $t > 2$, следовательно, найдем точку кривой при $t = 3$. Сделав подстановку, получим точку $\left[\frac{9}{2}, \frac{27}{2}\right]$.

3. Постройте кривую и отметьте на ней найденную точку.

4. Найдите уравнение касательной к кривой в найденной точке, постройте эту касательную. Как расположены точки кривой относительно касательной вблизи точки касания?

Продолжите исследования при других найденных значениях $t$.

**Задача 6.** Постройте кривую $x^4 - 2x^2y^2 + y^3 = 0$ и отметьте на ней точки перегиба.

Решение.

1. Перейдите к параметрическому заданию кривой (при помощи функции **PER_PAR**). Результат: $\left[\frac{t^3}{2t^2-1}, \frac{t^4}{2t^2-1}\right]$.

2. Выделите знаменатель какой-либо из полученных дробей и выполните L ↵. Вы получите нули знаменателя — они нужны для определения асимптот кривой.

3. Найдите асимптоты кривой (у нее две наклонные асимптоты), постройте кривую. Зрительно определите число точек перегиба. Для этого надо построить кривую при разных увеличениях.

4. Найдите $y''_{xx}$, выполните L ↵, затем выделите знаменатель производной, выполните L ↵. Вы получили нули числителя и знаменателя $t = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $t = \pm\sqrt{3}$, $t = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $t = 0$. При $t = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ функции $v(t)$ и $u(t)$ не определены, при $t = 0$ производная $y''_{xx}$ не меняет знака. Следовательно, надо найти точки кривой при $t = \pm\sqrt{3}$ и $t = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Найдите эти точки и отметьте их на кривой (рис.29).

Рассматривая рисунок при большом увеличении (Scale 0.5), можно подумать, что кривая имеет вертикальную асимптоту. На рис. 30 (Scale 5) хорошо видно, что их нет (на рис. 30 удалены асимптоты).

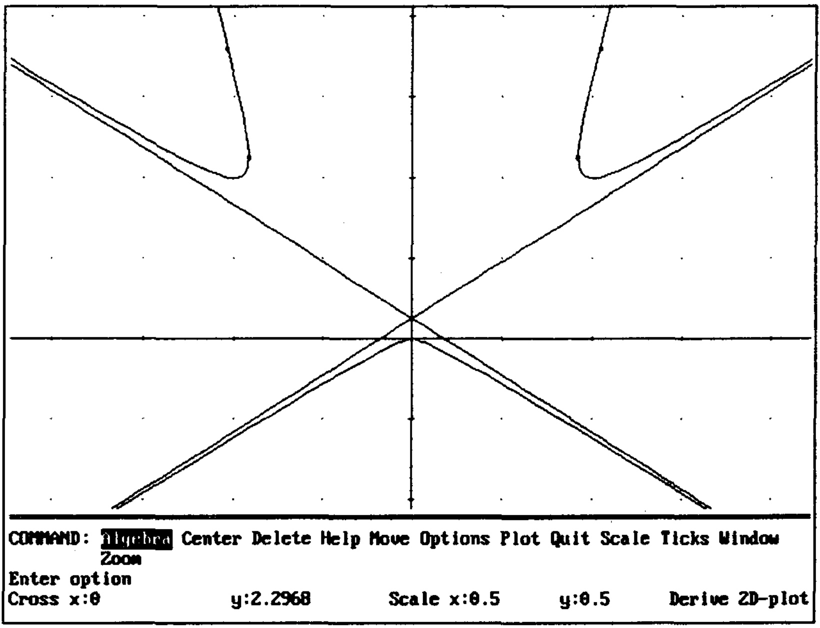



**Рис. 29**

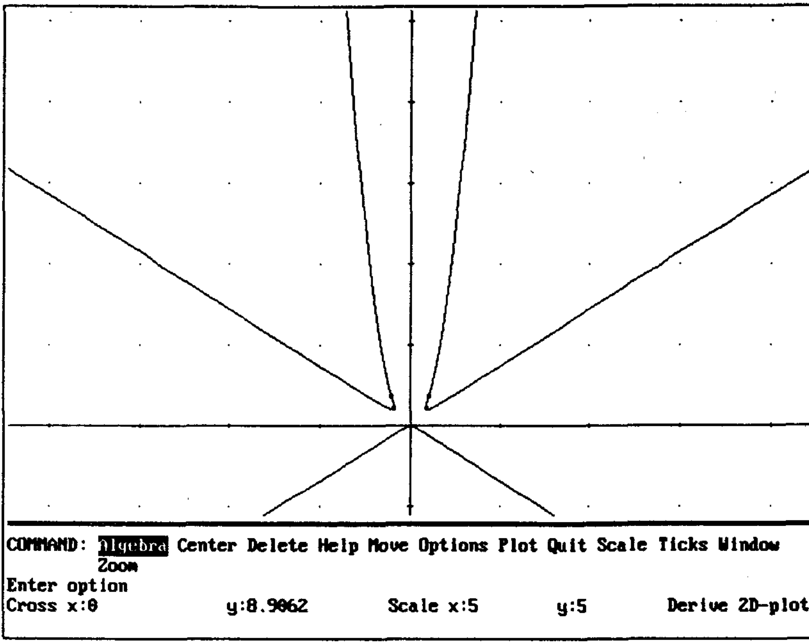



**Рис. 30**

**Задача 7.** Построить кривую $\left[t^2, \dfrac{1}{t^3 - 1}\right]$ и отметить на ней точки перегиба.

Ответ: Точки $\left[\dfrac{5^{1/3}}{5}, -\dfrac{5}{6}\right]$, $[0, -1]$.

> ***Указания.*** Постройте кривую, отметьте на ней точки перегиба. Установите указатель «+» в первую точку перегиба, увеличьте рисунок, центрируйте его (С). Зрительно убедитесь, что действительно отмеченная точка — точка перегиба. Проделайте то же со второй точкой.

На рис. (31 и 32) приведена кривая при разных увеличениях. Точка перегиба выделена.

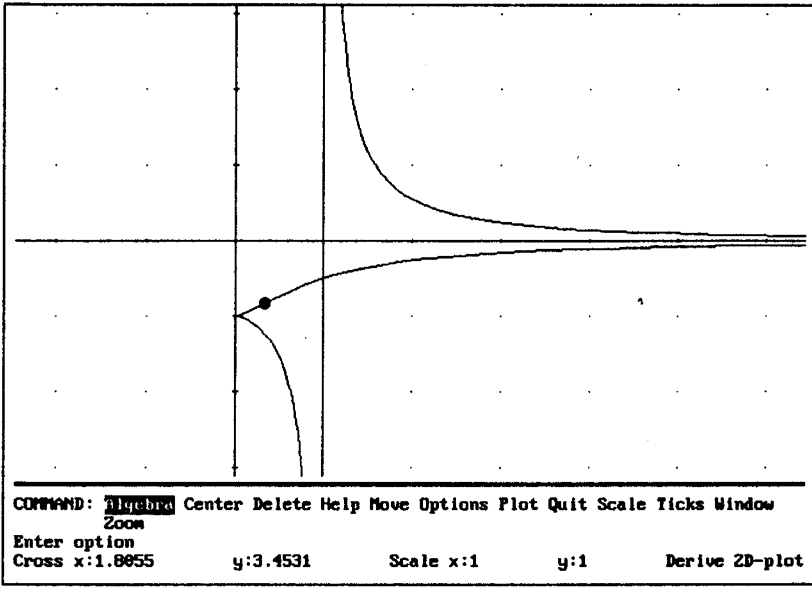

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
Zoom
Enter option
Cross x:1.8055 y:3.4531 Scale x:1 y:1 Derive 2D-plot

**Рис. 31**

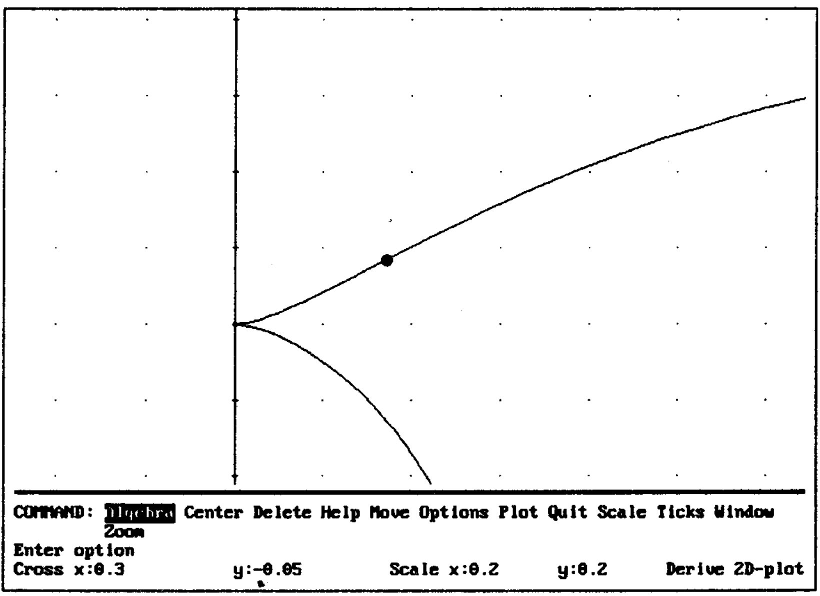

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
Zoom
Enter option
Cross x:0.3 y:-0.05 Scale x:0.2 y:0.2 Derive 2D-plot

**Рис. 32**

**Задача 8.** Найти точки перегиба кривой $\left[1+\operatorname{ctg} t, \dfrac{\cos 2t}{\sin t}\right]$ при $t \in (0;\pi)$.

*Указания.* Разложите на множители функцию $y''_{xx}$:
M T Direction:Expand Toward:Auto F ↵ Trivial ↵.
Результат: $-3\sin(t)^3(2\cos^2 t-1)$.
Выделите множитель $\sin t$, нажмите L ↵, затем выделите множитель $2\cos^{2t}-1$, нажмите L ↵.
Постройте кривую и касательные к ней, проходящие через найденные точки.
Ответ: точки перегиба (0; 0) и (2; 0).

**Задача 9.** Построить кривую $\left[\dfrac{t}{t^2-1}, \dfrac{t^2}{t-1}\right]$ и отметить на ней точки перегиба.

Решение.

1. Постройте кривую и зрительно определите ее точки перегиба.

2. Найдите $y''_{xx}$. Вы видите, что знаменатель полученной дроби всегда положителен.

3. Выделите курсором поля алгебры числитель и разложите его на множители (FR).

Результат: $2(t-1)^3(t+1)^3(t^3+3t+1)$. При $t = \pm 1$ функции $u(t)$ и $v(t)$ не определены, поэтому нам нужен только нуль многочлена $t^3+3t+1$.

4. Выделите этот множитель курсором, L ↵ X ↵. Результат: $t = -0.3222$. Найдите точку кривой, соответствующую данному значению параметра, и отметьте ее на кривой (рис. 33).

**Задача 10.** Найти точки перегиба кривой $\left[\dfrac{2t^2+2}{t}, \dfrac{t^3+3t+1}{t^2}\right]$ при $t \in (0;1)$. Сделать рисунок.

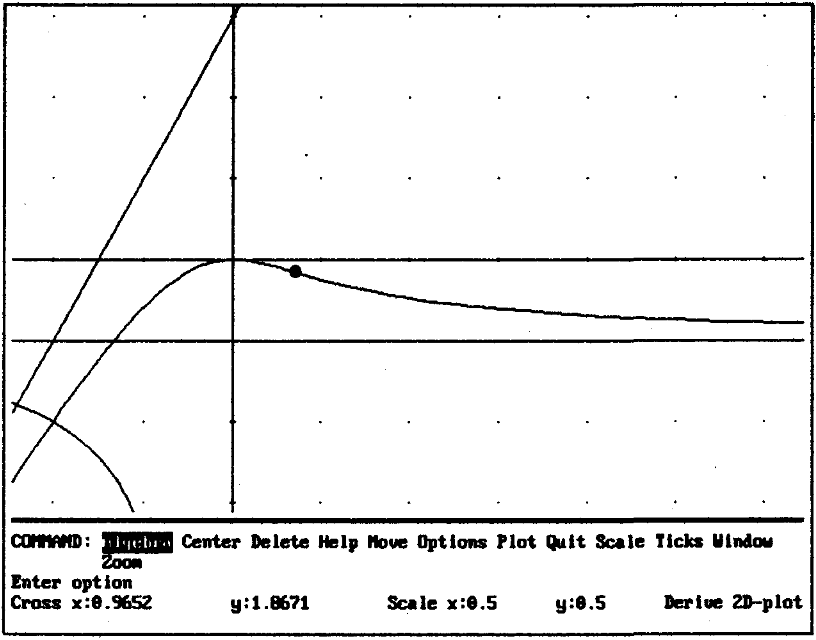



**Рис. 33**

Ответ: $\left(5;\dfrac{21}{2}\right)$.

**Задача 11.** Найти точки перегиба кривой $\left[te^{t}, te^{-t}\right]$. Сделать рисунок.

**Задача 12.** Построить кривую $\left[\dfrac{t^3}{t^2+1}, \dfrac{t}{t^2+1}\right]$ и касательные к ней, проходящие через точки перегиба данной кривой.

**Задача 13.** Построить кривую $\left[t^3, t^3-\dfrac{1}{t+1}\right]$ и отметить на ней точки перегиба.

Ответ: $\left[-\dfrac{1}{8}, -\dfrac{17}{8}\right]$, $[0,-1]$.

**Задача 14.** Построить кривую $(x+y)^3 = xy$ и отметить на ней точки перегиба.

Ответ: $\left[\dfrac{4}{27}, \dfrac{2}{27}\right]$.

**Задача 15.** Построить кривую $\left[t^4, t^2 - t^5\right]$ и отметить на ней точки перегиба.

# КАСАТЕЛЬНАЯ И НОРМАЛЬ К КРИВОЙ

## Касательная и нормаль к кривой, заданной параметрически

Введем функции, определяющие уравнения касательной и нормали к кривой $\left[u(t), v(t)\right]$ в точке $t = s$.

$$\boxed{\mathbf{K2}(u,v,s,t) := \lim_{t \to s} \frac{\dfrac{d}{dt}v}{\dfrac{d}{dt}u}}$$

$$\boxed{\mathbf{KAS2}(u,v,s,t,x,y) := y = \lim_{t \to s} v + \mathrm{K2}(u,v,s,t)x - \mathrm{K2}(u,v,s,t)\lim_{t \to s} u}$$

$$\boxed{\mathbf{NOR2}(u,v,s,t,x,y) := y = \lim_{t \to s} v - \frac{x}{\mathrm{K2}(u,v,s,t)} + \frac{\lim\limits_{t \to s} u}{\mathrm{K2}(u,v,s,t)}}$$

Функция **K2** определяет угловой коэффициент касательной, функция **KAS2** — уравнение касательной, **NOR2** — уравнение нормали. Мы воспользовались уравнениями касательной и нормали к кривой, приведенными ранее.

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Построить кривую $\left[\sqrt{3}t^2, t - t^3\right]$ и касательную к ней при $t = 1$.

Р е ш е н и е.

Найдем уравнение касательной.

**KAS2**$(\sqrt{3}t^2, t - t^3, 1)$ ↵ S ↵. Результат: $y = 1 - \dfrac{\sqrt{3}x}{3}$.

Постройте рисунок.

**Задача 2.** Построить кардиоиду $\left[\cos t(1+\cos t), \sin t(1+\cos t)\right]$, касательную и нормаль к ней при $t = \dfrac{3\pi}{4}$.

Р е ш е н и е.

1. **KAS2** $(\cos t(1+\cos t), \sin t(1+\cos t), 3\pi/4)$ ↵ S ↵.

Результат: $y = -x(\sqrt{2}+1) + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1$.

2. **NOR2** $(\cos t(1+\cos t), \sin t(1+\cos t), 3\pi/4)$ ↵ S ↵.

Результат: $y = x(\sqrt{2}-1) - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1$.

Постройте рисунок (рис. 34).

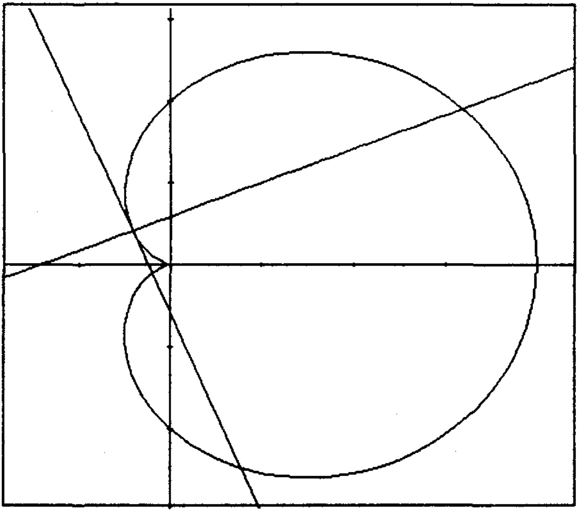


**Рис. 34**

**Задача 3.** Построить астроиду $\left[a\sin^3 t, a\cos^3 t\right]$, касательную и нормаль к ней при $t = \pi/4$ (рис. 35).

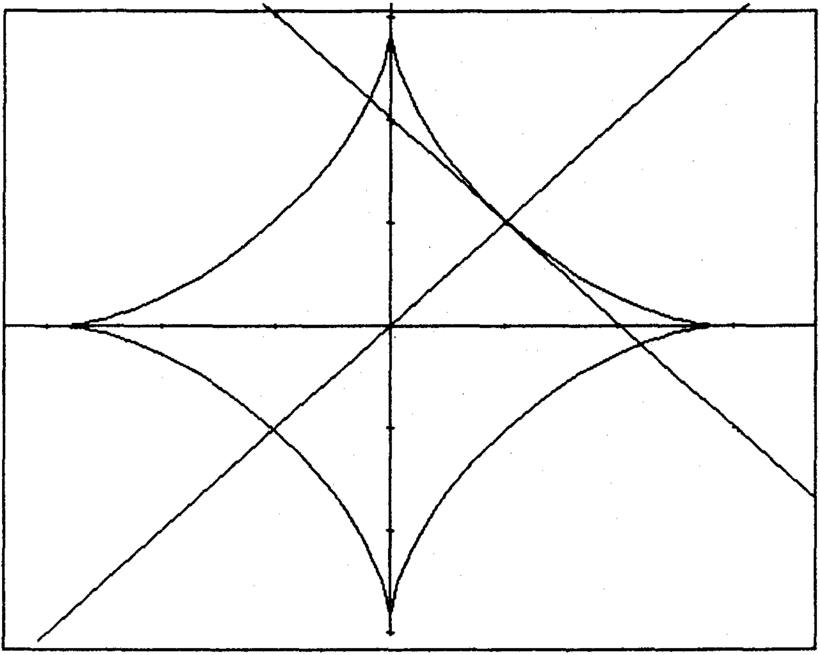


**Рис. 35**

**Задача 4.** Построить кривую $\left[2t - t^2, 2t^2 - t^3\right]$, касательную и нормаль к ней при $t = 0.65$ (рис. 36).

**Задача 5.** Построить циклоиду $\left[t - \sin t, 1 - \cos t\right]$, несколько касательных и нормалей к ней, например, при $t = \dfrac{\pi}{2}$, $t = \dfrac{\pi}{4}$, $t = \pi$.

**Задача 6.** Построить кривую $x^3 + y^3 - x^2 = 0$ и касательные к ней: а) параллельные наклонной асимптоте данной кривой; б) перпендикулярные ее наклонной асимптоте; в) найти уравнение горизонтальной касательной к данной кривой.

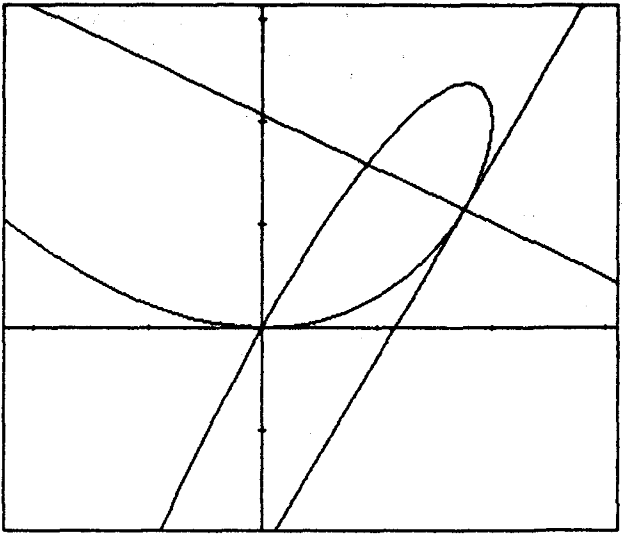


**Рис. 36**

Р е ш е н и е.

Ранее мы рассмотрели построение этой кривой. Ее параметрическое задание $\left[\dfrac{1}{t^3+1}, \dfrac{t}{t^3+1}\right]$. Асимптота этой кривой — прямая $y = \dfrac{1}{3} - x$.

а) Воспользуемся условием параллельности прямых: их угловые коэффициенты должны быть равны. Следовательно, угловой коэффициент искомой касательной должен быть равен $-1$.

1. $\mathrm{K2}\left(\dfrac{1}{t^3+1}, \dfrac{t}{t^3+1}\right) = -1$ ↲ S ↲. Результат: $\dfrac{2s^3-1}{3s^2} = -1$.

2. Решим это уравнение: L ↲. Результат: $s = \dfrac{1}{2}$, $s = -1$.

В данном случае можно было не выполнять предварительного упрощения, то есть сразу после введения уравнения нажать L.

3. При $t=-1$ функции $x(t)$ и $y(t)$ не определены, следовательно, надо найти уравнение касательной при $t=\frac{1}{2}$.

**KAS2** $\left(\frac{1}{t^3+1},\frac{t}{t^3+1},\frac{1}{2}\right)$ ↲ S ↲. Результат: $y=\frac{4}{3}-x$.

Постройте кривую и касательную к ней (рис. 37).

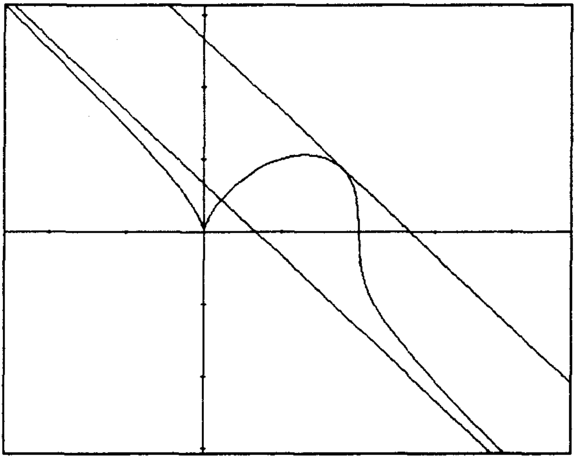


**Рис. 37**

б) Воспользуемся условием перпендикулярности двух прямых: произведение их угловых коэффициентов должно быть равно –1. Следовательно, угловой коэффициент искомой касательной должен быть равен 1.

**K2** $\left(\frac{1}{t^3+1},\frac{t}{t^3+1}\right)=1$ ↲ S ↲. Результат: $\frac{2s^3-1}{3s^2}=1$ L ↲.

Найдем приближенное значение найденного решения (действительного): X ↲. Результат: $s = 1.6765$. Продолжите решение задачи.

Ответ: а) $y=\frac{4}{3}-x$; б) приближенное уравнение касательной $y=x+0.118$; в) $y=\frac{2^{2/3}}{3}$.

**Задача 7.** Построить кривую $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (декартов лист) и касательные к ней, параллельные ее асимптоте.

Ответ: уравнение асимптоты $y = -x - 1$, уравнение касательной $y = 3 - x$ (рис. 38).

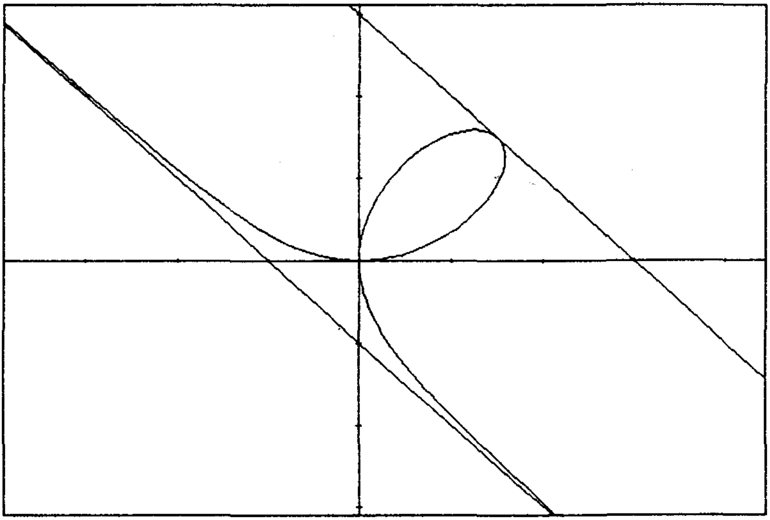


**Рис. 38**

**Задача 8.** Построить кривую $x^5 + y^5 = 5x^2y^2$ и касательные к ней при $t = 1$ (рис. 39).

**Задача 9.** Построить кривую $x^3 - (x - y)^2 = 0$ и касательную к ней: а) параллельную прямой $y = \dfrac{x}{2}$; б) перпендикулярную прямой $y = \dfrac{3x}{5} + 1$.

Решение.

Перейдите к параметрическому заданию кривой. Результат: $\left[(t-1)^2, t(t-1)^2\right]$.

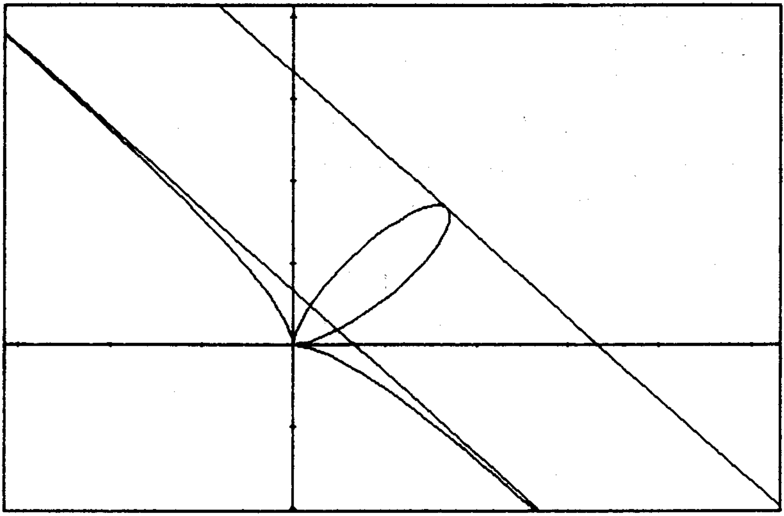


**Рис. 39**

а) Воспользуемся условием параллельности прямых.

**K2** $((t-1)^2, t(t-1)^2) = \frac{1}{2}$ ↵ S ↵. Результат: $\frac{3s-1}{2} = \frac{1}{2}$ L ↵.

Результат: $s = \frac{2}{3}$.

**KAS2** $((t-1)^2, t(t-1)^2, 2/3)$ ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{54}$.

**NOR2** $((t-1)^2, t(t-1)^2)$ ↵ S ↵. Результат: $y = \frac{8}{27} - 2x$.

б) Воспользуемся условием перпендикулярности прямых: угловой коэффициент искомой касательной должен быть равен –5/3. Продолжите решение задачи самостоятельно.

**Задача 10.** Построить кривую $\left[\frac{t^2}{1-t^2}, \frac{t^3}{1-t^2}\right]$ и касательные к ней: а) перпендикулярные асимптотам данной кривой; б) составляющие с асимптотой кривой угол в $\pi/4$.

Решение.

Постройте кривые $x(t)$ и $y(t)$. По виду этих кривых приходим к выводу, что у кривой $y(x)$ есть вертикальная асимптота $x = -1$ и могут быть две наклонные асимптоты.

$\mathbf{ASN2}\left(\dfrac{t^2}{1-t^2},\dfrac{t^3}{1-t^2},1\right)$ ↲ S ↲. Результат: $y = x - \dfrac{1}{2}$.

Аналогично при $t = -1$ Результат: $y = \dfrac{1}{2} - x$.

При желании можно найти уравнение вертикальной асимптоты, используя функцию **ASN**.

$\mathbf{ASN2}\left(\dfrac{t^3}{1-t^2},\dfrac{t^2}{1-t^2},\mathrm{inf},t,y,x\right)$ ↲ S ↲. Результат: $x = -1$.

Аналогично при $t = -\mathrm{inf}$ (рис. 40).

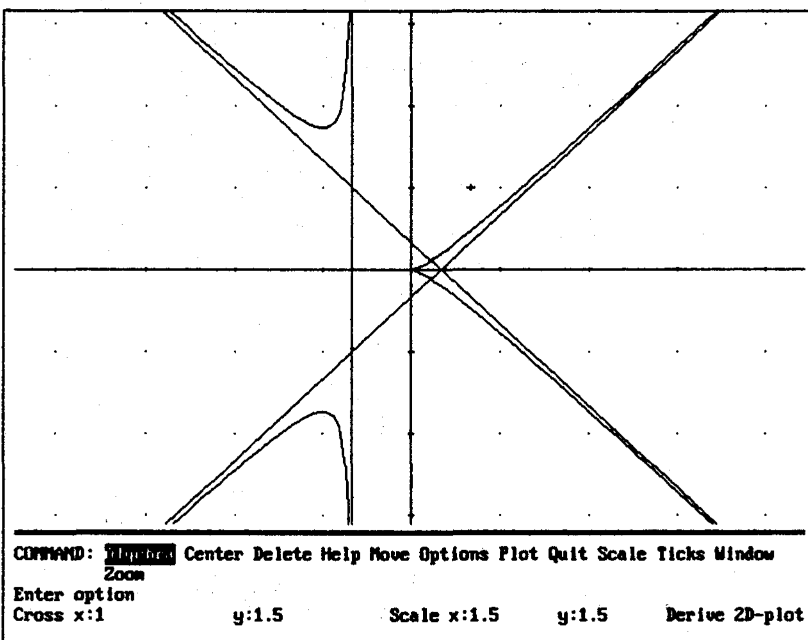



**Рис. 40**

а) Угловые коэффициенты искомых касательных должны быть равны 1 и −1.

1. $\mathbf{K2}\left(\dfrac{t^2}{1-t^2},\dfrac{t^3}{1-t^2}\right) = 1$ ↲ S ↲ L ↲. Результат: $s = -2$, $s = 1$.

2. При $t = 1$ функции $x(t)$ и $y(t)$ не определены, поэтому ищем уравнение касательной только при $t = -2$.

$$\mathbf{KAS2}\left(\frac{t^2}{1-t^2},\frac{t^3}{1-t^2},-2\right) \ \lrcorner\ \mathrm{S}\ \lrcorner$$

Вторую часть задачи решите самостоятельно.

Ответ: $y = -x - 4$.

Постройте кривую, асимптоты $y = x - \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2} - x$ и найденные касательные.

б) Фактически надо найти горизонтальные и вертикальные касательные к данной кривой.

Найдем горизонтальные касательные.

$$\mathbf{K2}\left(\frac{t^2}{1-t^2},\frac{t^3}{1-t^2}\right) = 0\ \lrcorner\ \mathrm{S}\ \lrcorner\ \mathrm{L}\ \lrcorner.$$

Результат: $S = \sqrt{3}$ , $S = -\sqrt{3}$ , 0.

Найдите уравнения касательных при найденных значениях. Это можно сделать, используя функцию **KAS2** или подставив в $y(t)$ вместо $t$ найденные значения.

Результат: $y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $y = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $y = 0$.

> ***Замечание.*** Вместо уравнения **K3**$(u, v) = 0$ можно решать уравнение **DIF**$(u,t) = 0$.

По виду кривой ясно, что вертикальных касательных к ней не существует. Убедитесь в этом. Для этого покажите, что уравнение **DIF**$(u,t) = 0$ не имеет решения.

**Задача 11.** Найти уравнения вертикальной и горизонтальной касательных к кривой $\left[\frac{t}{(t+1)^4},\frac{t^2}{(t+1)^4}\right]$.

**Задача 12.** Построить кривую $xy - y^2 = x$ и касательные к ней, перпендикулярные ее наклонной асимптоте.

Р е ш е н и е.

Построение этой кривой мы рассмотрели ранее. Перейдем к параметрическому заданию кривой, сделав замену $x = ty$. Результат: $\left[\frac{t}{t-1},\frac{t^2}{t-1}\right]$. Асимптоты кривой — прямые

$y = 1$ и $y = x - 1$. Следовательно, угловой коэффициент искомых касательных должен быть равен $-1$.

1. $\mathbf{K2}\left(\frac{t}{t-1}, \frac{t^2}{t-1}\right) = -1$ ↲ S ↲ L ↲.

Результат: $s = 1 - \sqrt{2}$, $s = \sqrt{2} + 1$.

2. $\mathbf{KAS2}\left(\frac{t}{t-1}, \frac{t^2}{t-1}, 1 - \sqrt{2}\right)$ ↲ S ↲.

Результат: $y = -x - 2\sqrt{2} + 3$.

$\mathbf{KAS2}\left(\frac{t}{t-1}, \frac{t^2}{t-1}, \sqrt{2} + 1\right)$ ↲ S ↲. Результат: $y = -x + 2\sqrt{2} + 3$.

Постройте кривую и касательные к ней. Самостоятельно решите задачу вторым способом, сделав замену $y = tx$.

**Задача 13.** Построить кривую $\left[\frac{t}{1-t^2}, \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}\right]$ и касательные к ней, перпендикулярные ее асимптотам.

Решение.

1. Постройте графики кривых $x(t)$ и $y(t)$ и исследуйте свойства этих кривых. Функция $x(t)$ четная, $y(t)$ — нечетная, следовательно, искомая кривая симметрична относительно начала координат.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t \to -1 \pm 0} x(t) = \mp\infty \\ \lim\limits_{t \to -1 \pm 0} y(t) = \mp\infty\end{array}\right| \Rightarrow$$ кривая имеет наклонную асимптоту в точке $t = -1$.

$\mathbf{ASN2}(x(t), y(t), -1)$ ↲ S ↲. Результат: $y = -x - 2$.

(Вместо $x(t)$ и $y(t)$ надо ввести данные функции.)

Аналогично приходим к выводу о том, что кривая имеет наклонную асимптоту при $t = 1$. Найдите уравнение асимптоты, результат: $y = 2 - x$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t \to \pm\infty} x(t) = 0 \\ \lim\limits_{t \to \pm\infty} y(t) = \pm\infty\end{array}\right| \Rightarrow$$ прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

Вы знаете, что уравнение этой асимптоты можно получить, используя функцию **ASN2**:

**ASN2**$(y(t), x(t), \mathrm{inf}, t, y, x)$ ↵ S ↵. Результат: $x = 0$.

**ASN2**$(y(t), x(t), -\mathrm{inf}, t, y, x)$ ↵ S ↵. Результат: $x = 0$.

2. Постройте кривую и ее асимптоты.

Найдем уравнения горизонтальных касательных.

3. **K2**$(x(t), y(t)) = 0$ ↵ S ↵. Результат: $\dfrac{2s^4 - 5s^2 + 1}{s^2 + 1} = 0$ L ↵

4. Найдите уравнения касательных при найденных значениях параметра.

Найдем уравнения касательных, перпендикулярных наклонной асимптоте.

5. **K2**$(x(t), y(t)) = 1$ ↵ S ↵ L ↵. Результат: $s = -\sqrt{3}$, $s = \sqrt{3}$, $s = 0$.

6. Найдите уравнения касательных при найденных значениях параметра.

7. Постройте найденные касательные.

Ответ: $y = 4.1996$, $y = -4.1996$, $y = 0.3368$, $y = -0.3368$, $y = x + 3\sqrt{3}$, $y = x - 3\sqrt{3}$, $y = x$.

**Задача 14.** Построить кривую $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ и вертикальную касательную к ней (рис. 41).

**Задача 15.** Построить касательные к кривой $\left[2t - 1, \dfrac{3t}{t^2 + 1}\right]$ в ее точках перегиба.

Решение.

Постройте кривую. По ее виду делаем вывод, что кривая имеет три точки перегиба.

1. Найдем эти точки.

**PROIZ_P2**$\left(2t - 1, \dfrac{3t}{t^2 + 1}\right)$ ↵ S ↵. Результат: $\dfrac{3t(t^2 - 3)}{(t^2 + 1)^2}$ L ↵.

Результат: $t = 0$, $t = -\sqrt{3}$, $t = \sqrt{3}$.

В найденных точках $y''_{xx}$ меняет знак, следовательно, точки, соответствующие найденным значениям параметра, являются точками перегиба кривой.

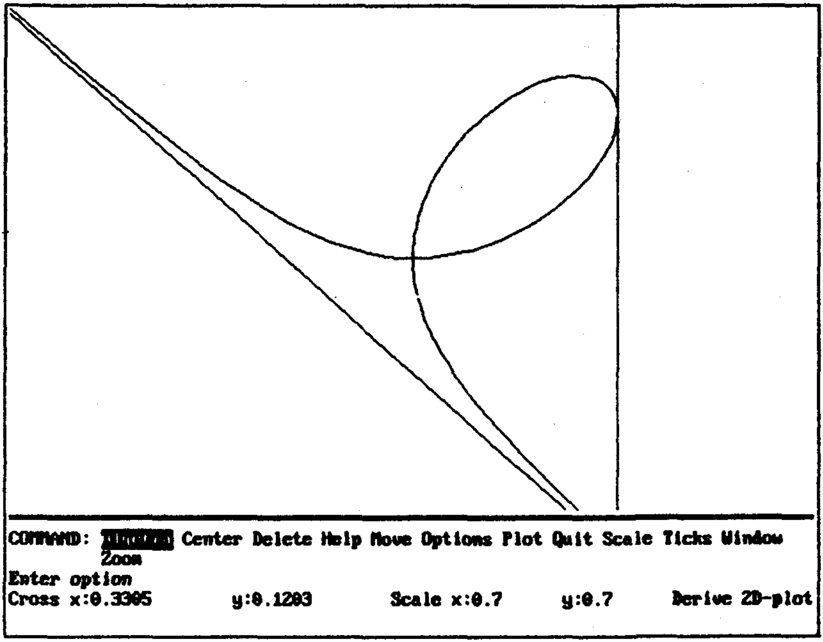



**Рис. 41**

2. Найдите точки перегиба кривой. Установите указатель «+» в эти точки и зрительно убедитесь в правильности вычислений.

3. Найдите уравнения касательных и постройте их.

**Задача 16.** Построить кривую $\left[t^2, t^2 + \frac{2}{t}\right]$ и касательную к ней, перпендикулярную ее асимптоте.

Ответ: уравнение асимптоты $y = x$, уравнение касательной к ней $y = 3 \cdot 2^{1/3} - x$.

**Задача 17.** Построить кривую $xy + x^2 + y^2 = x^3 + y^3$ и касательную к ней, параллельную ее асимптоте.

Ответ: уравнение касательной $y = 3 - x$.

## Касательная и нормаль к кривой, заданной в полярных координатах

Введем функции, определяющие уравнения касательной и нормали к кривой $r = \varphi(t)$ в точке $t = s$.

$$\boxed{\mathbf{UR}(r,t) := r\cos t} \qquad \boxed{\mathbf{VR}(r,t) := r\sin t}$$

$$\boxed{\mathbf{K3}(r,s,t) := \lim_{t\to s} \frac{\frac{d}{dt}\mathbf{VR}(r,t)}{\frac{d}{dt}\mathbf{UR}(r,t)}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbf{KAS\_POL}(r,s,t,x,y) := y = \\ &= \mathrm{K3}(r,s,t)x + \lim_{t\to s}\mathbf{VR}(r,t) - \mathbf{K3}(r,s,t)\lim_{t\to s}\mathbf{UR}(r,t)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\mathbf{NOR\_POL}(r,s,t,x,y) := y = \lim_{t\to s}\mathbf{VR}(r,t) - \frac{x}{\mathbf{K3}(r,s,t)} + \frac{\lim_{t\to s}\mathbf{UR}(r,t)}{\mathbf{K3}(r,s,t)}}$$

Функции **UR** и **VR** служат для перехода к параметрическому заданию кривой. **K3** — угловой коэффициент касательной к кривой.

***Замечание.*** Если у вас введены функции, определяющие уравнения касательной и нормали кривой, заданной параметрически, можно воспользоваться этим. Введите функции

$$\boxed{\mathbf{K3\_POL}(r,s,t) := \mathbf{K3}(\mathbf{UR}(r,t), \mathbf{VR}(r,t), s, t, x, y)}$$

$$\boxed{\mathbf{KAS3\_POL}(r,s,t,x,y) := \mathbf{KAS3}(\mathbf{UR}(r,t), \mathbf{VR}(r,t), s, t, x, y)}$$

$$\boxed{\mathbf{NOR3\_POL}(r,s,t,x,y) := \mathbf{NOR3}(\mathbf{UR}(r,t), \mathbf{VR}(r,t), s, t, x, y)}$$

Если вы собираетесь сохранить введенные функции в файле, то удобно функции **K3**, **KAS3**, **NOR3**, **K3_POL**, **KAS3_POL**, **NOR3_POL** сохранять в одном файле.

Конечно, в обоих случаях можно обойтись без вспомогательных функций **UR** и **VR**. Введите рассмотренные функции без функций **UR** и **VR**, немного изменив имена, например, добавив к именам _V, и убедитесь в совпадении результатов при решении какой-либо из задач, приведенных ниже.

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Построить кривую $r = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 4t + 3}}$, касательную и нормаль к ней: а) при $t = \pi/4$, б) при $t = \pi/8$.

Решение.

а) Найдем уравнения касательной и нормали при $t = \pi/4$.

**KAS_POL**$\left(\dfrac{1}{\sqrt{\cos 4t + 3}}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ ↲ S ↲. Результат: $y = 1 - x$.

**NOR_POL**$\left(\dfrac{1}{\sqrt{\cos 4t + 3}}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ ↲ S ↲. Результат: $y = x$.

Постройте кривую, касательную и нормаль (рис. 42).

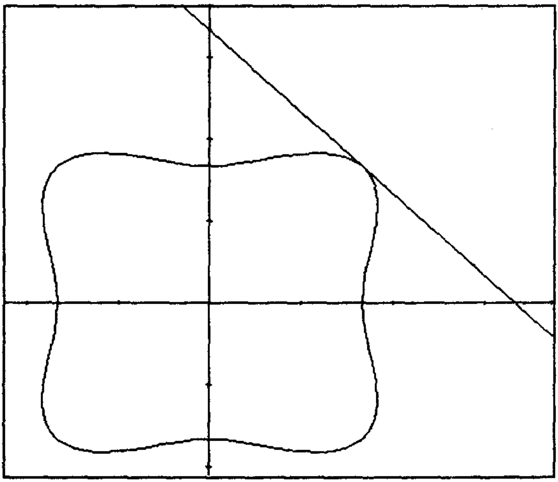


**Рис. 42**

Вторую часть задачи решите самостоятельно.

**Задача 2.** Построить кривую $r = \sin\frac{t}{3}$, ее касательную и нормаль при $t = \frac{\pi k}{2}$, $k = \overline{1,4}$.

Ответ: касательная $y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}x}{3}$, нормаль $y = \sqrt{3}x + \frac{1}{2}$ при $t = \frac{\pi}{2}$. На рис. 43 построена касательная.

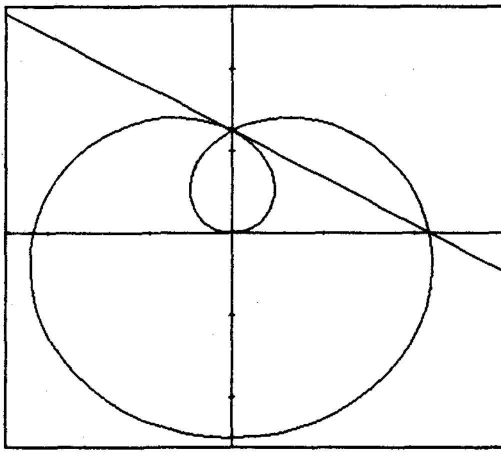


**Рис. 43**

**Задача 3.** Построить кардиоиду $r = 1 + \cos t$, касательную и нормаль к ней в точках, соответствующих $t = \frac{\pi}{12}$, $t = \frac{\pi}{6}$.

**Задача 4.** Каково взаимное расположение касательных к кривой $r = \sqrt{2 - 2\cos 4t}$ в точках, соответствующих значениям $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \frac{5\pi}{4}$, $t = \frac{7\pi}{4}$? Построить кривую и эти касательные.

**Задача 5.** Найти касательную к кривой $r = \sin^4\frac{t}{4}$ в точках $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{5\pi}{4}$, $t = 3\pi$, $t = \frac{7\pi}{2}$. Построить кривую и эти касательные.

**Задача 6.** Найти уравнения горизонтальных и вертикальных касательных к кривой $r = \cos 3t$.

Решение.

Постройте кривую и сделайте выводы о числе горизонтальных и вертикальных касательных к ней. (В каких пределах достаточно взять $t$ для построения кривой?)

Перейдем к параметрическому заданию кривой.

**PER_PARAM**(cos3*t*) ↵ S ↵.

Результат: [cos*t* cos3*t*, sin*t* cos3*t*].

Найдем горизонтальные касательные. Для этого определим значения $t$, при которых функция $y(t)$ равна нулю.

1. Установите M T Collect

**DIF**(sin*t* cos3*t*,*t*)↵ S ↵. Результат: $2\cos 4t - \cos 2t$.

2. Выделите курсором $t$ и замените $t$ на $u/2$ (M S).

Результат: $2\cos 2u - \cos u$.

3.Установите M T (Expand), L ↵.

4. В полученных равенствах замените $u$ на $2t$, X ↵ L ↵ X ↵.

Результаты: $t = 1.0282$, $t = 0.283909$.

Так как функция $y(t)$ нечетная, мы должны найти уравнения касательных не только при найденных значениях $t$, но также при $t = -1.0282$ и $t = -0.283909$.

5. Найдем уравнение касательной, например, при $t = 0.283909$

**KAS2**(cos*t* cos3*t*, sin*t* cos3*t*,0.283909) ↵ S ↵.

Результат: $y = 0.184513 - 1.49358 \cdot 10^{-5} x$.

Коэффициент при $x$ практически равен нулю, следовательно, это уравнение практически горизонтальной прямой.

Найдите уравнения остальных касательных. Как мы и ожидали, получили уравнения прямых, симметричных относительно прямой $y = 0$. Итак, все возможные четыре уравнения горизонтальных касательных найдены.

Найдем уравнения вертикальных касательных.

1. Установите M T Expand.

**DIF**(cos*t* cos3*t*, *t*) L ↵.

Результат: $t = 0,\ t = \dfrac{\pi}{2},\ t = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{atan}\left[\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right],\ t = \operatorname{atan}\left[\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right] + \dfrac{\pi}{2}.$

3. Уравнения вертикальных касательных к кривой можно найти двумя способами: используя функцию **KAS2** или подставляя найденные значения $t$ в функцию $x(t)$.

Продемонстрируем, как можно использовать функцию **KAS2** в этом случае.

**KAS2**$(\sin t\cos 3t, \cos t\cos 3t, 0, t, y, x)$ ↲ S ↲. Результат: $x = 1$.

Аналогично при $t = \dfrac{\pi}{2}$ результат: $x = 0$, при остальных двух значениях $t$ результат: $x = -\dfrac{9}{16}$.

Все возможные три вертикальные касательные найдены. Заметьте, что касательная $x = -\dfrac{9}{16}$ имеет две общие точки с кривой, как мы и ожидали. Постройте кривую и ее касательные $[0, y]$, $[1, y]$, $\left[-\dfrac{9}{16}, y\right]$.

**Задача 7.** Найти уравнения вертикальной и горизонтальной касательных к кривой $r = \sin\dfrac{t}{3}$ .

Ответ: $y = 0$, $y = -1$, $y \approx 0.5625$, $x \approx -0.8801$, $x \approx 0.1845$, $x \approx 0.8801$, $x \approx -0.1845$.

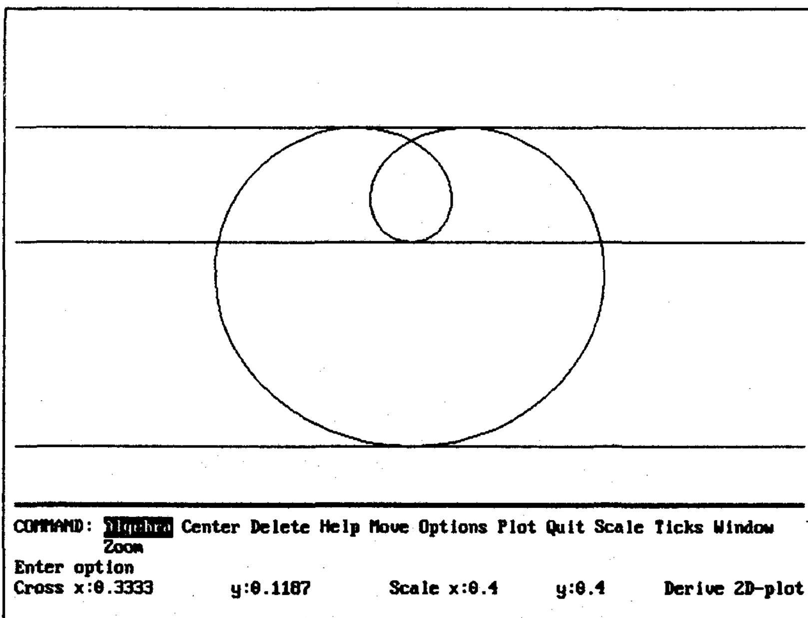



**Рис. 44**

На рис. 44 оси координат удалены для лучшего восприятия касательных к кривой.

**Задача 8.** Построить все касательные к кривой $r = \sin 2t$, проходящие через точку (1; 1). Найти тангенс угла между касательными к одному и тому же лепестку кривой.

Р е ш е н и е.

Найдем значения аргумента, при которых касательная к кривой проходит через точку (1; 1).

1. **KAS_POL**(sin2$t$)↵S ↵.

2. Умножим обе части полученного равенства на общий знаменатель, предварительно установив M T Collect, и упростите S ↵.

3. В полученное равенство подставим $x = 1$, $y = 1$.

4. Решим полученное уравнение: L ↵.

Результат: $\cos 4s - 3\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + 3s\right) - \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + s\right) - 1 = 0$.

5. Выделите курсором в поле алгебры левую часть этого равенства и постройте ее график. По графику определите приближенные значения $s$, при которых кривая пересекает ось абсцисс.

Построим прямые, касающиеся лепестка кривой, лежащего в первой четверти (рис. 45).

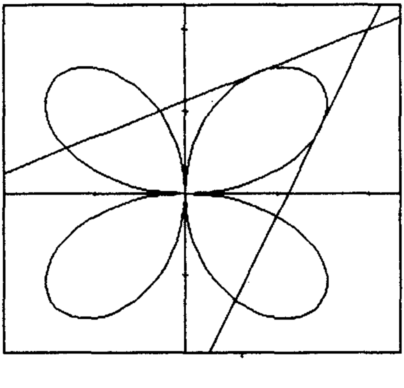


**Рис. 45**

По графику определяем, что $s \approx 1.0694$ и $s \approx 0.5$. Найдите уравнения касательных к данной кривой в полученных точках, постройте кривую и найденные прямые. Убедитесь зрительно и аналитически, что эти касательные пересекаются практически в точке (1; 1). Найдите тангенс угла между этими прямыми, используя функцию **TG_UG_PR**. Результат: $\approx 0.9444$.

Продолжите решение задачи.

Ответ: надо найти уравнения касательных при $s \approx -0.9166$, $s \approx 2.4930$, $s \approx 3.4513$, $s \approx 4.4027$.

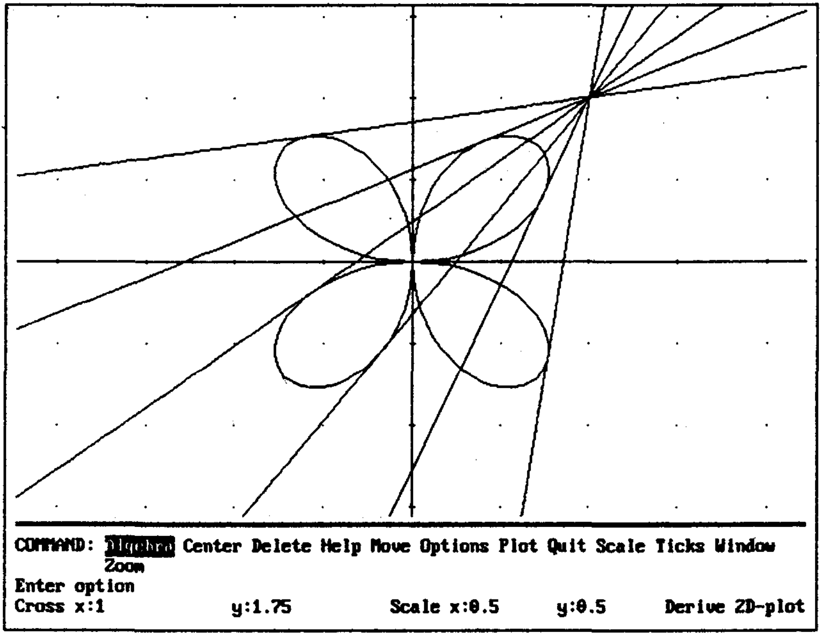



**Рис. 46**

На рис. 46 изображены все возможные касательные к кривой, проходящие через точку (1; 1).

## Касательная и нормаль к кривой, заданной неявно

Пусть уравнение $F(x, y) = 0$ задает неявно функцию $y = f(x)$ и пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$. Тогда в этой точке $y'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$.

Введем обозначение $k = -\left.\dfrac{F'_x}{F'_y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$, где $F(x_0,y_0)=0$. Тогда уравнение касательной к кривой $F(x,y)=0$ в точке $(x_0,y_0)$ имеет вид:

$$y = y_0 - k(x-x_0),$$

уравнение соответствующей нормали

$$y = y_0 + k(x-x_0).$$

Введем функции

$$\boxed{\mathbf{K\_NE}(u,t,v,s,y) := -\frac{\lim\limits_{y\to v}\lim\limits_{x\to t}\dfrac{d}{dx}u}{\lim\limits_{y\to v}\lim\limits_{x\to t}\dfrac{d}{dy}u}}$$

$$\boxed{\mathbf{KAS\_NE}(u,t,v,x,y) := y = v + \mathbf{K\_NE}(u,t,v,x,y)x - \mathbf{K\_NE}(u,t,v,x,y)t}$$

$$\boxed{\mathbf{NOR\_NE}(u,t,v,x,y) := y = v - \frac{x}{\mathbf{K\_NE}(u,t,v,x,y)} + \frac{t}{\mathbf{K\_NE}(u,t,v,x,y)}}$$

Функция **K_NE** определяет угловой коэффициент касательной к кривой $u = 0$ в точке $(t, v)$, $u = u(x, y)$, функция **KAS_NE** — уравнение касательной к этой кривой в указанной точке, функция **NOR_NE** — соответствующее этой касательной уравнение нормали.

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Найти уравнения касательных к кривой $x^2 + y^2 = 32$, проходящих через точку кривой с абсциссой: а) –3; б) 1, а также уравнения соответствующих им нормалей.

Решение.

Пусть $x_0 = -3$.

1. Найдем значение $y_0$ такое, что $x_0 + y_0 = 32$. Для этого в равенство $x^2 + y^2 = 32$ подставим $x_0 = -3$.

M S $x := -3$ ↲ $y$ ↲ L ↲. Результат: $y = \sqrt{23}$, $y = -\sqrt{23}$.

2. Найдем уравнение прямой, касающейся данной окружности в точке $(-3,\sqrt{23})$.

**KAS_NE**$(x^2+y^2-32,-3,\sqrt{23})$ ↵ S ↵ .

Результат: $y=\dfrac{3\sqrt{23}}{23}x+\dfrac{32\sqrt{23}}{23}$.

3. Найдем уравнение соответствующей нормали.

**NOR_NE**$(x^2+y^2-32,-3,\sqrt{23})$ ↵ S ↵.

Результат: $y=-\dfrac{\sqrt{23}x}{23}$.

Продолжите решение задачи самостоятельно. Сделайте рисунок.

**Задача 2.** Найти уравнение касательной к кривой $y^2=2x^3$: а) параллельной прямой $x-2y+2=0$; б) перпендикулярной прямой $y=-\dfrac{7x}{5}$.

Решение.

а) угловой коэффициент искомой касательной равен 1/2.

1. **K_NE**$(y^2-2x^3)=\dfrac{1}{2}$ ↵ S ↵. Результат: $\dfrac{3t^2}{v}=\dfrac{1}{2}$ .L ↵ v ↵.

Результат: $v=6t^2$.

2. В уравнение данной кривой подставим $x=t$, $y=6t^2$. Получим уравнение относительной переменной $t$: $36t^4=2t^3$.

3. Решим полученное уравнение (L ↵ ), получим $t=\dfrac{1}{18}$, $t=0$.

4. В равенство $v=6t^2$ подставим $t=\dfrac{1}{18}$, получим $v=\dfrac{1}{54}$.

5. Найдем уравнение касательной

**KAS_NE**$\left(y^2-2x^3,\dfrac{1}{18},\dfrac{1}{54}\right)$ ↵ S ↵. Результат: $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{108}$.

Для построения рисунка зададим кривую $y^2=2x^3$ параметрически: $\left[\dfrac{t^2}{2},\dfrac{t^3}{2}\right]$. Постройте кривую и касательную к ней.

Продолжите решение задачи самостоятельно.

# ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ

Пусть дан график функции $y = f(x)$. Требуется построить график функции $Y(x) = f(x-2)$.

Пусть в таблице приведены координаты трех точек, принадлежащих графику функции $y = f(x)$. Построим соответствующую таблицу значений функции $Y(x)$.

| $x$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1 | 3 |

$Y(3) = f(3-2) = f(1) = 0$. Следовательно, точке (1; 0) графика функции $y = f(x)$ соответствует точка (3; 0) графика функции $y = Y(x)$. Будем это записывать следующим образом: (1; 0) $\to$ (3; 0).

Аналогично покажите, что $(2;1) \to (4;1)$, $(3;3) \to (5;3)$.

| $x$ | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|
| $Y(x)$ | 0 | 1 | 3 |

Мы видим, что каждый раз для того, чтобы получить точку графика функции $Y(x) = f(x-2)$, соответствующую точке графика функции $y = f(x)$ из таблицы, надо точку графика функции $y = f(x)$ сдвинуть параллельно оси абсцисс вправо на 2 единицы.

Пусть точка $(x_0, y_0)$ — произвольная точка графика функции $y = f(x)$, то есть $y_0 = f(x_0)$. Найдем $Y(x_0 + 2)$.

$$Y(x_0 + 2) = f((x_0 + 2) - 2) = f(x_0).$$

Итак, если точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $(x_0 + 2; y_0)$ принадлежит графику функции $Y = f(x-2)$.

Следовательно, чтобы построить график функции $Y = f(x-2)$, надо график функции $y = f(x)$ сдвинуть параллельно оси абсцисс вправо на 2 единицы.

Ход рассуждений не изменится, если число 2 заменим любым другим положительным числом.

Получили правило:

***Для того чтобы построить график функции $y = f(x - a)$, $a > 0$, надо график функции $y = f(x)$ сдвинуть параллельно оси абсцисс вправо на а единиц.***

Рассуждая аналогично, получим правило:

***Для того чтобы построить график функции $y = f(x + a)$, $a > 0$, надо график функции $y = f(x)$ сдвинуть параллельно оси абсцисс влево на а единиц.***

Введем обозначения.

$\overset{\uparrow}{\circ}\ 2$ — сдвинуть график вверх вдоль оси ординат на 2 единицы;

$\genfrac{}{}{0pt}{}{\downarrow}{\uparrow}\ 2$ — сжать график функции вдоль оси ординат в 2 раза;

$\genfrac{}{}{0pt}{}{\uparrow}{\downarrow}\ 3$ — растянуть график функции вдоль оси ординат в 3 раза;

$\leftarrow\!\!\!\rightarrow\ 4$ — растянуть график функции вдоль оси абсцисс в 4 раза;

$\circ\!\!\rightarrow\ 2$ — сдвинуть график функции вдоль оси абсцисс вправо на 2 единицы;

↟ — отразить график функции зеркально относительно оси абсцисс.

| Задание функции, график которой надо построить | Преобразование, которое надо выполнить |
|---|---|
| $f(x) + c, c > 0$ | $\overset{\uparrow}{\circ}\ c$ |
| $f(x) - c, c > 0$ | $\underset{\downarrow}{\circ}\ c$ |
| $f(x + b), b > 0$ | $\leftarrow\!\!\circ\ b$ |
| $f(x - b), b > 0$ | $\circ\!\!\rightarrow\ b$ |
| $f(ax),\ a > 1$ | $\rightarrow\!\!\leftarrow\ a$ |
| $f\left(\dfrac{x}{a}\right),\ a > 1$ | $\leftarrow\!\!\!\rightarrow\ a$ |
| $kf(x),\ k > 1$ | $\genfrac{}{}{0pt}{}{\uparrow}{\downarrow}\ k$ |
| $\dfrac{f(x)}{k},\ k > 1$ | $\genfrac{}{}{0pt}{}{\downarrow}{\uparrow}\ k$ |
| $-f(x)$ | ↠ |
| $f(-x)$ | ↟ |

Два правила мы доказали, остальные докажите самостоятельно.

## ЗАДАЧИ

**Задача 1**. Сдвинуть кривую $y = \dfrac{10x}{x^2 - 9}$ так, чтобы центр симметрии ветвей новой кривой стал в точке (2; 0). Найти асимптоты обоих графиков. Сделать вывод.

Решение.

Данная функция является нечетной, следовательно, ее график симметричен относительно начала координат. График имеет вертикальные асимптоты $x = 3$ и $x = -3$, горизонтальную асимптоту $y = 0$ (докажите это).

$(0; 0) \rightarrow (2; 0) \Rightarrow$ надо выполнить преобразование $\multimap 2$.
В выражении данной функции заменим $x$ на $x-2$.

M S $x$: $= x-2$ ↲ L $y$ ↲. Результат: $y = \dfrac{10(x-2)}{x^2 - 4x - 5}$.

Разложите знаменатель этой дроби на множители. Результат: $y = \dfrac{10(x-2)}{(x-5)(x+1)}$. График этой функции имеет вертикальные асимптоты $x = -1$, $x = 5$ и горизонтальную асимптоту $y = 0$.

$(x = -3) \multimap 2$. Результат: $x = -1$. $(x = 3) \multimap 2$. Результат: $x = 5$.

Мы видим, что к вертикальным асимптотам применено то же преобразование, что и к самому графику функции.

**Задача 2.** Преобразовать кривую $y = \dfrac{2x(x-80)(x+200)}{20000}$ так, чтобы новая кривая пересекала ось абсцисс в точках $x = 0$, $x = 20$, $x = -50$. Выполнить при этом наименьшее число преобразований.

Решение.

График данной функции пересекает ось абсцисс в точках $x = 0$, $x = 80$, $x = -200$. $\dfrac{80}{20} = \dfrac{-200}{-50} = 4$. Следовательно, точки пересечения данной кривой расположены в 4 раза ближе к началу координат, чем точки пересечения с осью абсцисс искомой кривой. Поэтому достаточно данную кривую сжать в 4 раза вдоль оси абсцисс (к оси ординат).

M S $x{:}=4x$ ↲ S ↲. Результат: $y=\frac{4x(x-20)(x+50)}{625}$.

Постройте графики обеих функций.

**Задача 3**. Преобразовать кривую $y=\frac{x^3-4x^2-20x+48}{2(x^2+1)}$ так, чтобы новая кривая пересекала ось абсцисс в точках $x=12$, $x=4$, $x=-8$, а прямая была асимптотой новой кривой.

Решение.

1. Разложим числитель данной дроби на множители (F Rational). Результат: $y=\frac{(x-6)(x-2)(x+4)}{2(x^2+1)}$. Следовательно, кривая пересекает ось абсцисс в точках $x=6$, $x=2$, $x=-4$. Покажите, что точки пересечения искомой кривой с осью абсцисс расположены в 2 раза дальше от начала координат.

2. Найдем наклонную асимптоту данной кривой.

**ASN_P**$(y(x))$ (вместо $y(x)$ введите выражение функции) ↲ S ↲. Результат: $y=\frac{x}{2}-2$.

**Задача 4**. Постройте кривую $y=\frac{x^3-3x+2}{x^2+1}$ и ее асимптоты. Растяните кривую вдоль оси ординат в 2 раза. Постройте новую кривую и ее асимптоты. Сравните уравнения этих двух кривых. Сделайте выводы.

Решение.

1. Функция определена на всей числовой прямой, следовательно, ее график не имеет вертикальных асимптот. Найдем уравнение наклонной асимптоты.

**ASN_P**$(y(x))$ (вместо $y(x)$ ввести выражение функции) ↲ S ↲. Результат: $y=x$.

2. Сделаем замену.

M S $x$ ↲ $y{:}=y/2$ ↲ L $y$ ↲. Результат: $y=2x-\frac{4(2x-1)}{x^2+1}$.

3. Найдем наклонную асимптоту полученной функции.

**ASN_P**$(y(x))$ ↲ S ↲ (вместо $(y(x))$ — выражение полученной функции). Результат: $y=2x$. Сделайте вывод.

**Задача 5**. Дана таблица. В ее верхней строке указан номер задания, во второй строке указана функция, над которой выполнили преобразования, указанные в третьей строке. Требуется в четвертой строке таблицы указать вид функции, которая получится в результате выполненных преобразований (в общем виде), затем построить график указанной функции и кривую, полученную в результате преобразований. Сравнить уравнения их асимптот и сделать выводы.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $y_1(x)$ | $y_3(x)$ | $y_1(x)$ | $y_2(x)$ | $y_5(x)$ |
| ∘→ 2 | ←∘ 1 | ∘↓ 2 | ∘↑ 1 | ↕ 2 |
| | | | | |

| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| $y_6(x)$ | $y_4(x)$ | $y_3(x)$ | $y_4(x)$ | $y_1(x)$ |
| ↓↑ 2 | ↕ 3 | →←  2 | ←→ 2 | ➳ |
| | | | | |

| 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|
| $y_4(x)$ | $y_7(x)$ | $y_3(x)$ |
| ➳ | ⇞ | ⇞ |
| | | |

Образец выполнения задания:

| 1 |
|---|
| $y_2(x)$ |
| ∘→ 1 |
| $f(x-1)$ |

Здесь $y_1 = \dfrac{x^2}{x^2-4}$, $y_2 = \dfrac{x^3}{x^2-4}$, $y_3 = \dfrac{x^3}{(x-2)(x+1)}$,
$y_4 = x\cdot \operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}$, $y_5 = \operatorname{arctg} x$, $y_6 = x - 2\operatorname{arctg} x$, $y_7 = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

**Задача 6.** Построить график функции $y = \dfrac{2(x^2-1)}{x^2+1}$ так, чтобы экстремум функции, график которой получится в результате преобразований, был в точке (0; –4), а прямая $y = 4$ была асимптотой новой кривой.

Р е ш е н и е.

1. Найдем уравнение горизонтальной асимптоты графика данной функции.

**ASN_P**($y(x)$) (вместо $y(x)$ ввести выражение функции) ↵ S ↵. Результат: $y = 2$.

2. Найдем точки экстремума данной функции.

**DIF**($y(x)$) = 0 (вместо $y(x)$ ввести выражение функции) ↵ S ↵ L ↵. Результат: $x = 0$, $y(0) = -2$.

Убедитесь в том, что точка (0; –2) является точкой минимума кривой.

Итак, $\left.\begin{matrix}(y=2)\to(y=4)\\(0;-2)\to(0;-4)\end{matrix}\right|$ ⇒ надо выполнить преобразование ↬2.

M S $x$ ↵ $y$: = $y$/2 ↵ L $y$ ↵ E ↵. Результат: $y = 4 - \dfrac{8}{x^2+1}$.

Сделайте проверку: найдите минимум полученной функции и ее асимптоту. Выполните рисунок.

**Задача 7.** Выполните задачу, аналогичную задаче 5. Постройте кривые, выбрав в качестве исходной кривой график любой из функций, приведенной в задаче 6.

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| ↬2 ↧4 | ↫2 ↠ | ↠ ↥3 |
| | | |

| 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|
| ⇕2 ⤊ | ⤓⤒2 ↔2 | ↠ ↬2 ↧1 |
| | | |

**Задача 8.** Преобразовать кривую $y = \dfrac{x^3 - 12x^2 - 288x + 2560}{64}$ так, чтобы экстремальные значения функции, графиком которой служит новая кривая, были при $y = \dfrac{7\sqrt{7}}{2} + 5$ и $y = 5 - \dfrac{7\sqrt{7}}{2}$.

Решение.

Найдите точки экстремумов функции.

Результат: $(4 - 4\sqrt{7};\ 14\sqrt{7} + 20)$ и $(4\sqrt{7} + 4;\ 20 - 14\sqrt{7})$.

$\dfrac{14\sqrt{7} + 20}{\dfrac{7\sqrt{7}}{2} + 5} = 4$, $\dfrac{20 - 14\sqrt{7}}{5 - \dfrac{7\sqrt{7}}{2}} = 4$, следовательно, достаточно кривую сжать в 4 раза вдоль оси ординат (к оси абсцисс), то есть $\underset{\uparrow}{\overset{\downarrow}{}}$ 4.

Закончите решение задачи самостоятельно.

**Задача 9.** Сдвинуть график функции $y = \dfrac{1}{20}(x^3 - 48x - 96)$ так, чтобы точка минимума новой кривой имела координаты (–4; 10).

Ответ: $\leftarrow\!\circ$ 8 $\updownarrow$ $\dfrac{106}{5}$.

**Задача 10.** Выполнив наименьшее число преобразований, преобразовать параболу $y = 2x^2 - 4x + 5$ так, чтобы ветви новой параболы были направлены вниз, экстремум был в точке (–2; 1) и кривая проходила через точку (–3; –1).

Ответ: один из возможных вариантов $\twoheadrightarrow$ $\leftarrow\!\circ$3 $\updownarrow$4.

Проследим, как меняются координаты вершины параболы при выполнении указанных преобразований.

Вершина данной параболы находится в точке (1; 3).

1. $\twoheadrightarrow$ (1; 3) → (1; –3)
2. $\leftarrow\!\circ$3 (1; –3) → (–2; –3)
3. $\updownarrow$ 4 (–2; –3) → (–2; 1).

Убедитесь, что вершина полученной вами параболы проходит через точку (–2; 1).

Наиболее сложными являются случаи построения графиков функций вида $y = f(ax+b)$ и особенно $y = f(-ax+b)$, где $a > 0$.

**Задание.** Постройте график функции $y = \log_2(2x+4)$, а затем постройте все графики, которые пришлось бы выполнить при построении графика данной функции на бумаге. Сколько способов построения существует? Затем выполните это задание с графиком функции $y = \log_2(-2x+4)$.

## ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Несколько задач с параметрами рассмотрено в подразделах «Функции пользователя» и «Геометрический смысл производной». Рассмотрим еще несколько типовых задач.

**Задача 1**. При каких $a$ выражение $x^2 + y^2$ принимает наибольшее значение, если $x$ и $y$ — решения системы:
а) $\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=a^2-5a+8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+y=b-4 \\ xy=b^2-3b+4 \end{cases}$?

Решение.

$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$.

Подставив вместо $x + y$ и $xy$ данные выражения, получим некоторую функцию переменной $a$. Для сокращения работы введем вспомогательную функцию

$$\boxed{V\_S(t,s) = t^2 - 2s}$$

а) **V_S**$(a+2, a^2-5a+8)$ ↲ S ↲. Результат: $-a^2+14a-12$.

Перед нами стоит задача: найти значение $a$, при котором полученное выражение принимает наибольшее значение при условии, что данная система имеет решение.

Система имеет решение, если имеет решение уравнение $t^2-(a+2)t+(a^2-5a+8)=0$. Это уравнение квадратное, оно имеет решение, если его дискриминант неотрицателен. Найдем дискриминант этого уравнения.

**DISCR**$(1, a+2, a^2-5a+8)$ ↲ S ↲.

Результат: $-3a^2+24a-28$.

Итак, надо найти наибольшее значение трехчлена $-a^2+14a-12$ на том отрезке, где $-3a^2+24a-28\ge 0$.

Найдите приближенные значения корней последнего трехчлена. Результат: $a\approx 1.42$ , $a\approx 6.58$ . Следовательно, $-3a^2+24a-28\ge 0$ на отрезке $[a_1;a_2]$, где $a_1\approx 1.42$, $a_2\approx 6.58$. Найдем абсциссу вершины параболы $y=-a^2+14a-12$. Это можно сделать различными способами, например,

**DIF**$(-a^2+14a-12,a)$ ↵ S ↵ L ↵. Результат: $a=7$.

$b\notin[a_1;a_2]$, следовательно, функция $y=-a^2+14a-12$ принимает свое наибольшее значение на одном из концов отрезка $[a_1;a_2]$. Можно вычислить значения функции в обеих точках, либо построить график функции $y=-a^2+14a-12$ и либо прямые $x=a_1$ и $x=a_2$, либо параболу $y=-3a^2+24a-28$ и зрительно сравнить значения функции $y=-a^2+14a-12$ на концах рассматриваемого отрезка.

Задание б) выполните самостоятельно.

Ответ: а) $f_{наиб}=f(a_2)$; б) $f_{наиб}=f(0)=8$.

**Задача 2**. При каких $a$ уравнение $y=\sqrt{x+a}$ имеет два решения?

Р е ш е н и е.

Возьмем любое $a$, например $a=0$, и построим кривую $y=\sqrt{x+a}$ при выбранном $a$, то есть кривую $y=\sqrt{x}$ и прямую $y=x$. Мы видим, что графики пересеклись в двух точках, следовательно, при $a=0$ уравнение имеет два решения.

При изменении $a$ кривая $y=\sqrt{x+a}$ сдвигается вправо или влево. При уменьшении $a$ она сдвигается вправо (можете убедиться в этом, построив кривую, например при $a=-1$). Найдем $a$, при котором прямая $y=x$ имеет единственную общую точку с этой кривой, то есть значение $a$, при котором прямая $y=x$ является касательной к кривой $y=\sqrt{x+a}$ .

Составим систему

[**K1**($\sqrt{x+a}$) = 1,**SVCH_KAS1**($\sqrt{x+a}$) = 0] ↵ S ↵.

Результат: $\left[\dfrac{1}{2\sqrt{a+t}}=1,\dfrac{2a+t}{2\sqrt{a+t}}=0\right]$.

Преобразовав систему, получаем [4 $(a + t) = 1{,}2a + t = 0$] (при $a + t > 0$) L ↵. Результат: $\left[a = -\dfrac{1}{4}, t = \dfrac{1}{2}\right]$. Следовательно, прямая $y = x$ является касательной к кривой $y = \sqrt{x - \dfrac{1}{4}}$ и $x = \dfrac{1}{2}$ — абсцисса точки касания.

Постройте кривую $y = \sqrt{x - \dfrac{1}{4}}$. По рисунку видим, что если $a \in (-1/4; 0)$, то кривая $y = \sqrt{x + a}$ имеет две общие точки с прямой $y = x$ (убедитесь в этом, построив кривую при каком-либо $a$ из этого интервала), следовательно, уравнение имеет два решения.

Если $a < 0$, то уравнение имеет одно решение, если $a < -1/4$, уравнение не имеет решений. Убедитесь в этом, используя чертеж.

Ответ: при $a \in (-1/4;\ 0]$ уравнение имеет два решения.

**Задача 3**. При каких $a$ уравнение $\sqrt{x + 3} = 2x - a$ имеет единственное решение?

Решение.

1. Выясним, при каком $a$ прямая $y = 2x - a$ является касательной к кривой $y = \sqrt{x + 3}$. Составим систему

**[K1**($\sqrt{x+3}$)=2,**SVCH_KAS1**($\sqrt{x+3}$) $= -a$] ↵ S ↵.

Результат: $\left[\dfrac{1}{2\sqrt{t+3}} = 2, \dfrac{t+6}{2\sqrt{t+3}} = -a\right]$. Выделим при помощи стрелок ← и → первое уравнение системы и решим его (L ↵). Результат: $t = -\dfrac{47}{16}$. Скопируем второе уравнение в новую строку и заменим в ней $t$ найденным значением.

M S $t$: = –47/16 ↵ L ↵. Результат: $a = -\dfrac{49}{8}$. При этом значении $a$ уравнение имеет единственное решение.

2. Постройте кривую $y = \sqrt{x + 3}$ и прямую $y = 2x + \dfrac{49}{8}$. Кривая пересекает ось абсцисс при $x = -3$. Найдем значение $a$, при котором прямая $y = 2x - a$ пересекает эту ось в этой

же точке. $2(-3)-a=0 \Rightarrow a=-6$. Постройте прямую при этом значении $a$.

Ясно, что если $a \in \left(-\frac{49}{8};-6\right)$, то кривая и прямая пересекаются в двух точках, следовательно, уравнение имеет два решения. Если а < –49/8, то линии не пересекаются — решений нет, если $a>-6$ — одно решение.

При уменьшении $a$ прямая $y=2x-a$ сдвигается влево. Следовательно, уравнение не имеет решения при $a<-49/6$. При увеличении $a$ графики функций сначала имеют две точки пересечения, затем одну.

Ответ: при $a=-\frac{49}{8}$, при $a>-6$.

**Задача 4**. При каком $a$ неравенство $\sqrt{x+a} \geq x+1$ имеет решение?

Решение.

1. Найдем значение $a$, при котором прямая $y=x+1$ является касательной к кривой $y=\sqrt{x+a}$.

Составим систему [**K1**($\sqrt{x+a}$) = 1, **SVCH_KAS1**($\sqrt{x+a}$) = 1] ↲S ↲.

Результат: $\left[\frac{1}{2\sqrt{a+t}}=1, \frac{2a+t}{2\sqrt{a+t}}=1\right]$. Выразим из первого уравнения $t$ (L $t$ ↲), подставим найденное значение во второе уравнение и решим его.

M S $t$: = 1/4 – $a$ ↲ L ↲. Результат: $a=3/4$. Следовательно, при найденном значении $a$ неравенство имеет решение.

2. Постройте кривую $y=\sqrt{x+\frac{3}{4}}$ и прямую $y=x+1$. По рисунку видим, что если $a<3/4$, то линии не имеют точек пересечения, при этом при всех $x \geq -a$ выполняется неравенство $\sqrt{x+a}<x+1$.

Ответ: при $a \geq 3/4$.

**Задача 5**. При каких $a$ уравнение $|2x+2|=ax^2+4$ имеет единственное решение?

Решение.

$$|2x+2|=\begin{cases}2x+2, x \geq -1\\ -2x-2, x<-1\end{cases}$$

1. Найдем $a$, при котором прямая $y = 2x + 2$ является касательной к параболе $y = ax^2 + 4$.

[**K1**($ax^2 + 4$) = 2, **SVCH_KAS1**($ax^2 + 4$) = 2] ↵ S ↵.

Результат: $\left[2at = 2, 4 - at^2 = 2\right]$.

Из первого уравнения следует, что $at = 1 \Rightarrow 4 - t = 2 \Rightarrow \Rightarrow t = 2 \Rightarrow a = 1/2$. Получили, что парабола $y = \dfrac{x^2}{2} + 4$ и прямая $y = 2x + 2$ касаются в точке с абсциссой, равной 2. Так как $2 > -1$, $a = 1/2$ входит в ответ задачи.

2. Найдем $a$, при котором прямая $y = -2x - 2$ является касательной к параболе $y = ax^2 + 4$.

[**K1**($ax^2 + 4$) = 2, **SVCH_KAS1**($ax^2 + 4$) = 2] ↵ S ↵.

Решите полученную систему. Результат: $a = 1/6$, $t = -6$. Так как $-6 < -1$, то, $a = 1/6$ входит в ответ задачи.

Для проверки вы можете найти уравнение касательных. **KAS1**($x^2/2+4,2$) ↵ S ↵ , **KAS1**($x^2/6+4,-6$) ↵ S ↵.

3. Сделайте рисунок: постройте графики функций $y = |2x + 2|$, $y = \dfrac{x^2}{2} + 4$, $y = \dfrac{x^2}{6} + 4$. Убедитесь в правильности полученных результатов: установите указатель «+» в точки касания и определите их координаты, сравните с теми, которые получили аналитически.

Ответ: при $a = 1/2$ и $a = 1/6$.

**Задача 6**. Сколько решений имеет уравнение $\sqrt{3x - a} = x + 2$ в зависимости от параметра $a$?

Решение.

1. Найдем значение $a$, при котором прямая $y = x + 2$ является касательной к кривой $y = \sqrt{3x - a}$. Составим систему

[**K1**($\sqrt{3x-a}$) = 1, **SVCH_KAS1**($\sqrt{3x-a}$) = 2] ↵ S ↵.

Результат: $\left[\dfrac{3}{2\sqrt{3t-a}} = 1, \sqrt{3t-a} - \dfrac{3t}{2\sqrt{3t-a}} = 2\right]$.

Из первого уравнения системы следует, что $\sqrt{3t-a} = \dfrac{3}{2}$.

Во втором уравнении системы выделите $\sqrt{3t-a}$ и замените его на 3/2 (MS 3/2 ↵) L ↵.

Результат: $t = -1/2$.

В первое уравнение подставим найденное значение $t$ и решим полученное уравнение, результат: $a = -15/4$.

Можно сделать проверку: **KAS1** $(\sqrt{3x+15/4}, -1/2)$ ↲ S ↲.

2. Сделаем рисунок, построим графики функций $y = \sqrt{3x + \frac{15}{4}}$ и $y = x + 2$.

При $x = -2$ прямая $y = x + 2$ пересекает ось абсцисс. Найдем $a$, при котором кривая $y = \sqrt{3x - a}$ проходит через точку $(-2; 0)$. В равенство $y = \sqrt{3x - a}$ подставим $x = -2$ и $y = 0$. Результат: $a = -6$. Постройте кривую $y = \sqrt{3x + 6}$.

По рисунку видим, что если $a \in \left[-6; -\frac{15}{4}\right)$, то линии имеют две общих точки, следовательно, уравнение имеет два решения. Если $a < -6$, то линии пересекаются в одной точке (постройте кривую, например, при $a = -7$), следовательно, уравнение имеет одно решение. Если $a > -15/4$, то линии не пересекаются, уравнение не имеет решений.

Ответ:

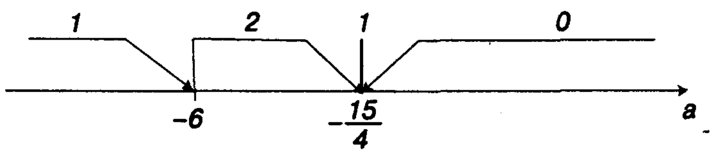



**Рис. 47**

**Задача 7**. Сколько решений имеет уравнение $\sqrt{2x - a} = x$ в зависимости от параметра $a$?

Ответ:

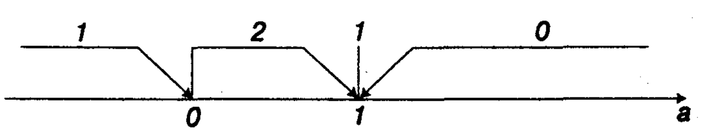



**Рис. 48**

**Задача 8.** Найти число корней уравнения $|x^2-4x+3|=ax$ в зависимости от параметра $a$.

Решение.

Постройте кривую $y=|x^2-4x+3|$. Графики функций $y=ax$ — прямые, проходящие через начало координат. Поэтому ясно, что задача легко решается, если знать уравнение касательной к кривой $y=-(x^2-4x+3)$, проходящей через начало координат и касающейся параболы в точке с положительной абсциссой, и уравнение касательной к кривой $y=x^2-4x+3$, проходящей через начало координат и касающейся параболы в точке с отрицательной абсциссой.

*1 -й способ.*

1. **KAS1** $(-(x^2-4x+3))$ ↵ S ↵.

Результат: $y=-2x(t-2)+t^2-3$.

2. M S $x:=0$ $y:=0$ ↵ S ↵ L ↵. Результаты: $t=\sqrt{3}$, $t=-\sqrt{3}$. Второе значение отбрасываем, так как оно отрицательное.

3. Надо найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=-(x^2-4x+3)$ при $t=\sqrt{3}$ (то есть при $x_0=\sqrt{3}$).

**K1** $(-(x^2-4x+3),\sqrt{3})$ ↵ S ↵. Результат: $4-2\sqrt{3}$ X ↵. Результат: 0.536.

Для построения рисунка нам надо получить уравнение касательной. Ясно, что оно $y=(4-2\sqrt{3})x$. Можно было, наоборот, найти уравнение касательной, для этого в найденное уравнение подставить $t=\sqrt{3}$ или снова воспользоваться функцией **KAS1**.

**KAS1** $(-(x^2-4x+3),\sqrt{3})$ ↵ S ↵. Результат: $y=(4-2\sqrt{3})x$.

Теперь можно выделить курсором поля алгебры коэффициент при $x$ и найти его приближенное значение (X ↵) в случае необходимости.

Для этого быстрее вновь воспользоваться функцией **KAS1**, чем делать подстановки, тем более, что можно очень быстро скопировать строку **KAS1** $(-(x^2-4x+3))$ в строку ввода при помощи клавиши **F3** и подредактировать ее.

4. **KAS1** $(x^2-4x+3)$ ↵ S ↵. Результат: $y=2x(t-2)-t^2+3$.

5. M S $x:=0$ $y:=0$ ↵ S ↵ L ↵. Результат: $t=-\sqrt{3}$, $t=\sqrt{3}$. Второе значение отбрасываем, так как оно положительно.

6. Надо найти угловой коэффициент касательной к кривой $y = x^2 - 4x + 3$ при $t = -\sqrt{3}$ (то есть при $x_0 = -\sqrt{3}$).

**KAS1** $(x^2 - 4x + 3, -\sqrt{3})$ ↵ S ↵. Результат: $y = -x(2\sqrt{3} + 4)$. Угловой коэффициент равен $\approx -7.464$.

7. Постройте касательные $y = x(4 - 2\sqrt{3})$ и $y = -x(2\sqrt{3} + 4)$ (рис. 49). По рисунку определяем число точек пересечения прямых $y = ax$ с графиком функции $y = |x^2 - 4x + 3|$, это и есть число решений данного уравнения.

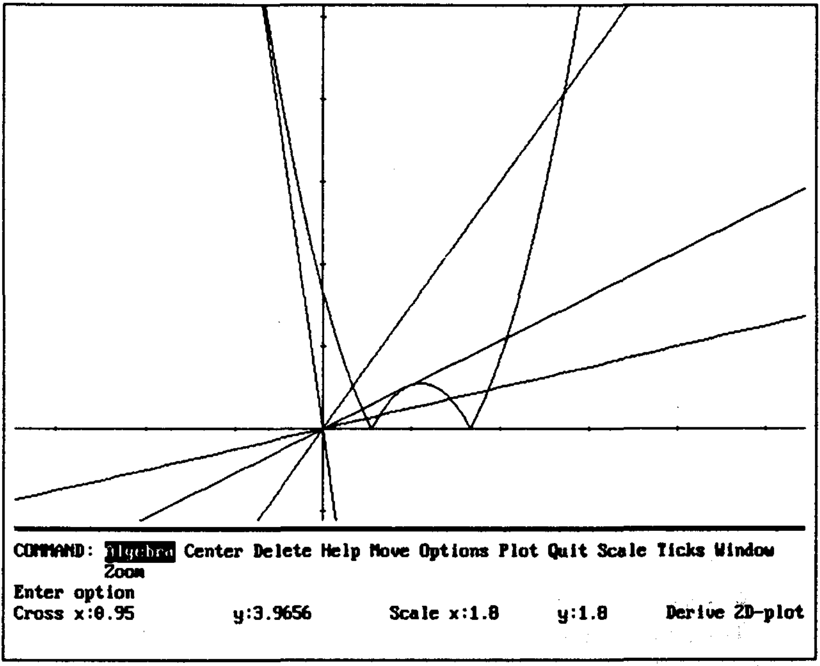



**Рис. 49**

*2-й способ.*

Так как касательная должна проходить через точку (0; 0), можно воспользоваться функцией **SVCH_KAS1** вместо функции **KAS1**.

1. **SVCH_KAS1** $(-(x^2 - 4x + 3))$ ↵ S ↵. Результат: $t^2 - 3$ L ↵. Результат: $t = -\sqrt{3}$, $t = \sqrt{3}$.

Дальнейшее решение очевидно. Как видим, этот путь короче.

Ответ (рис. 50):

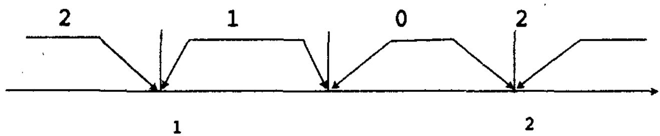



**Рис. 50**

где $a_1 = -2\sqrt{3} - 4$, $a_2 = 4 - 2\sqrt{3}$.

**Задача 9**. Доказать, что треугольник, образованный касательной к гиперболе $xy = a$ и осями координат, имеет постоянную площадь, равную $2a^2$, а точка касания является центром окружности, описанной около этого треугольника. Сделать чертеж.

**Задача 10**. Сколько решений имеет уравнение $\left||x-2|-4\right| = 4-(x-a)^2$ в зависимости от параметра $a$?

Решение.

Графиком функции $y = 4-(x-a)^2$ является парабола, ветви ее направлены вниз, наибольшее значение функции равно 4 при $x = 2$.

Постройте график функции $y = \left||x-2|-4\right|$ и несколько парабол при каких-либо значениях параметра $a$ (рис. 51).

Проанализируйте полученный рисунок (рис. 51). Мы видим, что график функции $y = \left||x-2|-4\right|$ имеет максимальное значение. Легко определить, что координаты точки максимума (2; 4). Если вершина параболы будет в этой точке, линии пересекутся в трех точках.

Будем менять значение $a$, при этом парабола будет передвигаться вдоль оси абсцисс влево или вправо, линии будут пересекаться в четырех, трех, двух, одной точках или у них не будет точек пересечения.

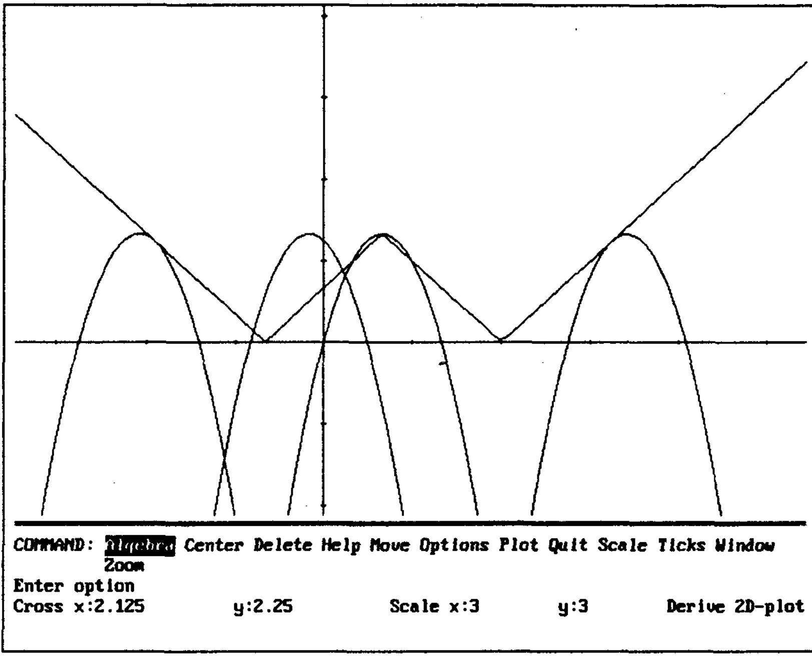



**Рис. 51**

Раскроем знаки модулей:

$$y = \big||x-2|-4\big| = \begin{cases} x-6, & x \ge 6 \\ 6-x, & 2 \le x < 6 \\ x+2, & -2 \le x < 2 \\ -x-2, & x < -2 \end{cases}$$

Ясно, что для ответа на вопрос задачи надо определить значения параметра $a$, при которых прямые $y = x - 6$, $y = x + 2$, $y = 6 - x$, $y = -x - 6$ являются касательными к параболе $y = 4 - (x - a)^2$.

Найдем значение параметра, при котором прямая $y = x - 6$ является касательной к параболе.

$\lfloor \mathbf{K1}(4-(x-a)^2) = 1, \mathbf{SVCH\_KAS1}(4-(x-a)^2) = -6 \rfloor$ ↲ S ↲.

Результат: $2(a-t) = 1, -a^2 + t^2 + 4 = -6$.

Выразим из первого уравнения переменную $t$ (L t ↵) и подставим найденное выражение во второе уравнение. Решим полученное уравнение, результат: $a=\frac{41}{4}\Rightarrow t=\frac{39}{4}$. Для проверки можно найти уравнение касательной:

**KAS1** $(4-(x-41/4)^2, 39/4)$ ↵ S ↵. Результат: $y=x-6$, что и требовалось доказать.

Постройте эту прямую. При $a = 41/4$ графики пересекаются в одной точке, следовательно, уравнение имеет единственное решение. Мы видим, что если увеличивать значение $a$, то парабола будет смещаться вправо. Следовательно, при $a > 41/4$ графики не пересекаются, уравнение не имеет решений. Если значение $a$ уменьшать, парабола будет смещаться влево, графики будут иметь две общих точки до тех пор, пока прямая $y=x+2$ не станет касательной к параболе.

Найдите значение параметра $a$, при котором эта прямая является касательной к параболе. Результат: $a = 9/4$, $t = 7/4$. Постройте параболу при найденном значении $a$. Теперь графики имеют три общих точки. При $a\in\left(\frac{9}{4};\frac{41}{4}\right)$ уравнение имеет два решения.

Сдвинем параболу немного влево, например, положим $a=15/8$, построим соответствующую параболу. Рассмотрим рисунок при разных увеличениях, например, при Scale 2 и Scale0.05 (рис. 52 и 53 при Scale 0.5 и Scale 0.1).

При большом увеличении (рис. 53) хорошо видно, что графики функций вблизи точки максимума графика функции $y=||x-2|-4|$ пересекаются дважды, то есть при $a = 15/8$ уравнение имеет четыре решения, и на всем промежутке $\left[\frac{15}{8};\frac{9}{4}\right)$ уравнение имеет четыре решения.

Будем вновь сдвигать параболу влево. Так как при $a = 2$ вершина параболы совпадает с точкой максимума графика первой функции, то при $a = 2$ уравнение имеет три решения. Постройте параболу при $a = 2$ и зрительно убедитесь в правильности рассуждений. Как мы уже видели, вблизи точки максимума графики пересекаются в четырех точках. Итак, при $a\in\left(2;\frac{9}{4}\right)$ уравнение имеет четыре решения.

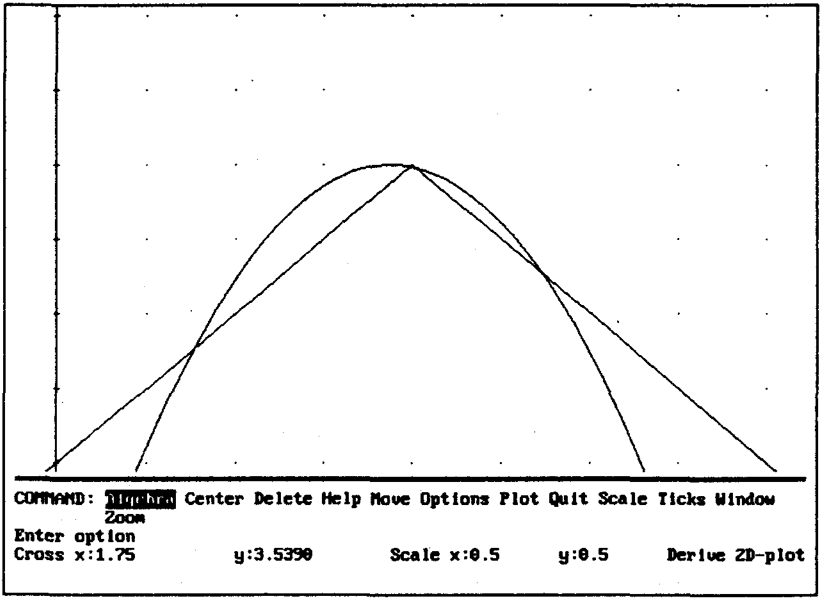

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
Zoom
Enter option
Cross x:1.75 y:3.5390 Scale x:0.5 y:0.5 Derive 2D-plot

**Рис. 52**

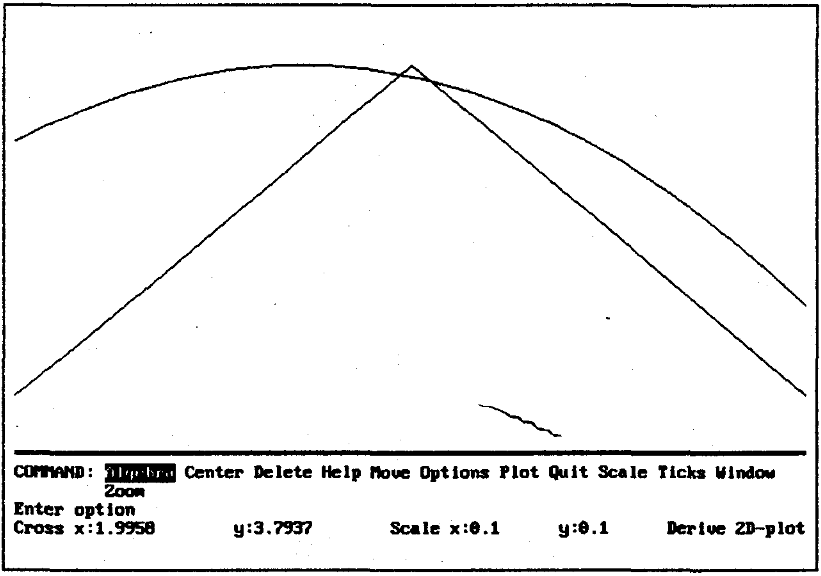

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
Zoom
Enter option
Cross x:1.9958 y:3.7937 Scale x:0.1 y:0.1 Derive 2D-plot

**Рис. 53**

Пользуясь тем, что график функции $y = ||x-2|-4|$ симметричен относительно прямой $x = 2$, и тем, что парабола также имеет ось симметрии, можно записать ответ данной задачи.

Ответ: (рис. 54):

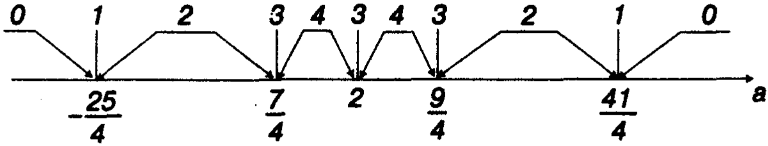



**Рис. 54**

# ПОДЭРА КРИВОЙ

***Подэрой плоской кривой*** относительно какой-либо точки $O$, лежащей в плоскости кривой, называется множество оснований перпендикуляров, опущенных из точки $O$ на касательную к кривой.

Пусть точка $O$ имеет координаты $(w, z)$, $(s, y(s))$ — координаты точки касания кривой $y = y(x)$ и касательной к ней. Найдем параметрическое задание подэры к кривой $y = y(x)$ в виде $[X(w, z, s), Y(w, z, s)]$.

Если точка $(w, z)$ — фиксированная, то функции $X$ и $Y$ — функции одной переменной $s$.

Уравнение касательной к кривой $y = y(x)$ имеет вид:

$$y = y(s) + k(x - s), \tag{1}$$

где $k = y'(s)$. Уравнение прямой, перпендикулярной прямой (1), имеет вид:

$$y = -\frac{x}{k} + c. \tag{2}$$

Эта прямая проходит через точку $(w, z)$, поэтому

$$z = -\frac{w}{k} + c \Rightarrow \ \Rightarrow \ c = z + \frac{w}{k}.$$

Следовательно, уравнение (2) имеет вид:

$$y = -\frac{x}{k} + z + \frac{w}{k}. \tag{3}$$

Из системы уравнений $\begin{cases} y = y(s) + k(x - s) \\ y = -\dfrac{x}{k} + z + \dfrac{w}{k} \end{cases}$ выразим $x$ и $y$:

$$y(s) + k(x - s) = -\frac{x}{k} + z + \frac{w}{k} \Rightarrow x\left(k + \frac{1}{k}\right) = z + \frac{w}{k} + ks - y(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \left(k + \frac{1}{k}\right)^{-1}\left(z + \frac{w}{k} + ks - y(s)\right).$$

Найденное выражение подставим вместо $x$ в уравнение (3). Получим:

$$y = -\frac{1}{k}\left(k + \frac{1}{k}\right)^{-1}\left(z + \frac{w}{k} + ks - y(s) + \frac{w}{k}\right) \Rightarrow$$

$$y = \left(z + \frac{w}{k} + ks - y(s)\right)(k^2 + 1)^{-1} + z + \frac{w}{k}.$$

Искомые равенства получены.

Введем обозначение $a = z + \dfrac{w}{k}$, тогда $x = \dfrac{a + ks - y(s)}{k^2 + 1}k$, $y = a + \dfrac{x}{k}$.

**Подэра кривой, заданной параметрически**

Пусть кривая задана параметрически: $\left[u(t), v(t)\right]$. Тогда вместо $s$ надо подставить $u(s)$, вместо $y(s)$ — $v(s)$, $k$ определяется функцией **K2**, $u(s)$ найдем как $\lim\limits_{t \to s} u$, $v(s)$ — как $\lim\limits_{t \to s} v$, для вычисления значения $a$ введем вспомогательную функцию **VS_PODE**.

$$\mathbf{VS\_PODE}\,(u, v, w, z, s, t) := z + \frac{w}{\mathbf{K2}(u, v, s, t)}$$

$$\mathbf{POX}(u,v,w,z,s,t) := \frac{\mathbf{VS\_PODE}(u,v,w,z,s,t) + \mathbf{K2}(u,v,s,t)\lim\limits_{t\to s} u - \lim\limits_{t\to s} v}{\mathbf{K2}(u,v,s,t)^2 + 1} \mathbf{K2}(u,v,s,t)$$

$$\mathbf{POY}(u,v,w,z,s,t) := \mathbf{VS\_PODE}(u,v,w,z,s,t) - \frac{\mathbf{POX}(u,v,w,z,s,t)}{\mathbf{K2}(u,v,s,t)}$$

$$\mathbf{PODERA}(u,v,w,z,s,t) := \left[\mathbf{POX}(u,v,w,z,s,t), \mathbf{POY}(u,v,w,z,s,t)\right]$$

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Найти подэру параболы $\left[t^2, 2t\right]$ относительно точки: а) $O(0; a)$; б) $O(-1; a)$.

Решение.

а) $\mathbf{PODERA}(t^2, 2t, 0, a)$ ↵ S ↵. Результат: $\left[\dfrac{s(a-s)}{s^2+1}, \dfrac{a+s^3}{s^2+1}\right]$.

Постройте параболу и несколько кривых полученного семейства. Обратите внимание на то, что эти кривые имеют вертикальную асимптоту. Постройте ее. Кривые называются ***офиуридами*** (рис. 55);

*б*) ответ:

$$\left[\frac{s(a-2s)}{s^2+1}, \frac{a+s(s^2-1)}{s^2+1}\right].$$

**Задача 2.** Найти подэру астроиды $\left[\cos^3 t, \sin^3 t\right]$ относительно точки: а) $O(0;0)$; б) $O(0;2)$.

Ответ: а) $\left[\sin^2 s \cos s, \sin s \cos^2 s\right]$;

б) $\left[\cos s(\sin^2 s - 2\sin s), \cos^2 s(\sin s - 2) + 2\right]$.

На рис. 56 представлены астроида и ее подэра относительно точки (0; 2).

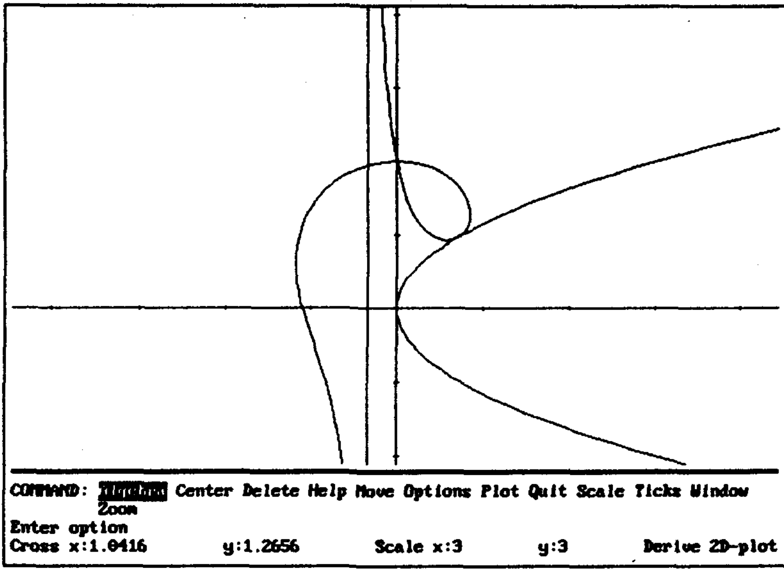

COMMAND: Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
Zoom
Enter option
Cross x:1.0416 y:1.2656 Scale x:3 y:3 Derive 2D-plot

Рис. 55

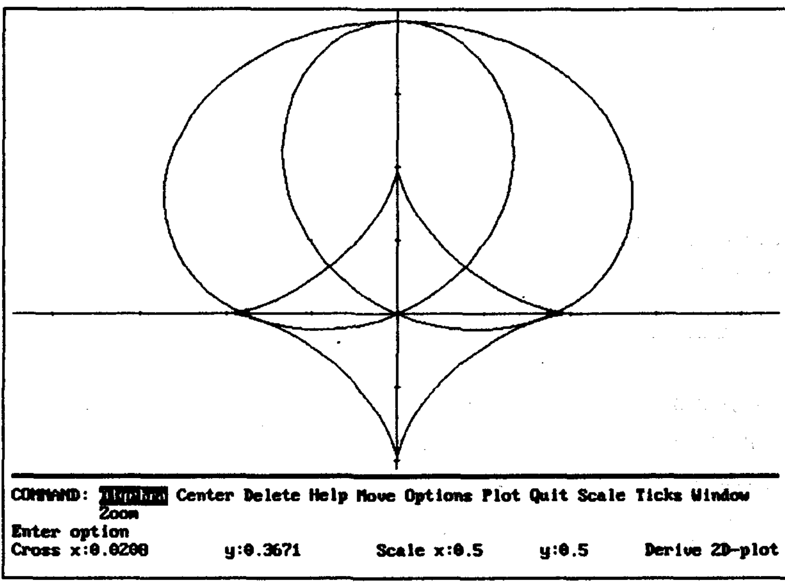

COMMAND: Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
Zoom
Enter option
Cross x:0.0208 y:0.3671 Scale x:0.5 y:0.5 Derive 2D-plot

Рис. 56

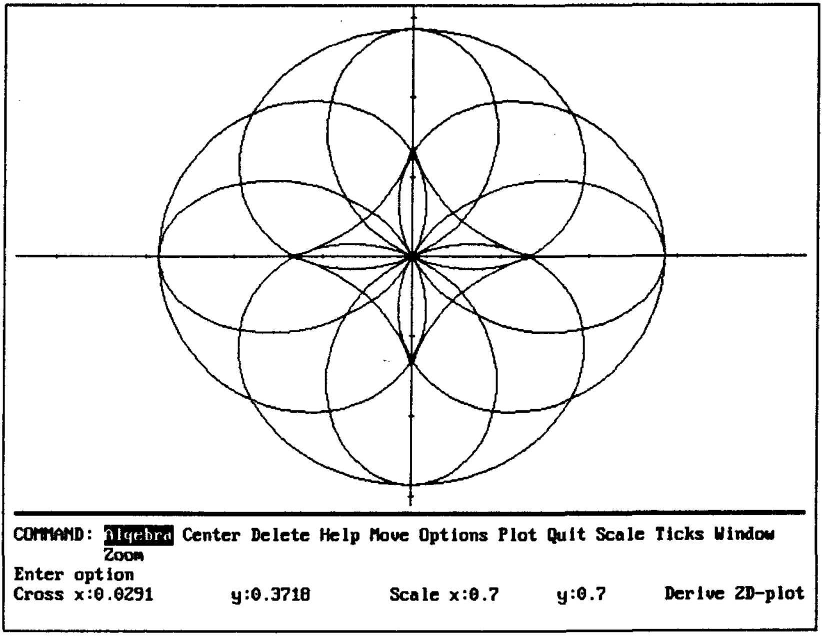



**Рис. 57**

На рис. 57 представлены астроида и ее подэры относительно точек (0; 2), (0; –2), (2;0), (–2;0).

**Задача 3.** Найти подэру окружности [cos$t$, sin$t$] относительно точки:

а) $O(a, 0)$. Постройте окружность и подэры при $a = -1$, $a = -2$, $a = -3$;

б) $O(-2, 1)$. Сделайте рисунок.

**Задача 4.** Найти подэру гипоциклоиды [$n\cos t + \cos nt$, $n\sin t - \sin nt$] относительно точки (0; 0). Постройте обе кривые при $n = 4$, $n = 5$ (рис. 58).

**Задача 5.** Найти подэру эпициклоиды [$5\cos t - \cos 5t$, $5\sin t - \sin 5t$] относительно точки (0; 0). Постройте обе кривые.

**Задача 6.** Найти подэру циклоиды [$t - \sin t$, $1 - \cos t$] относительно точки (0; 0). Постройте обе кривые.

**Задача 7.** Найти подэру кардиоиды [$2\cos t - \cos 2t$, $2\sin t - \sin 2t$] относительно точки (0; 0). Постройте обе кривые.

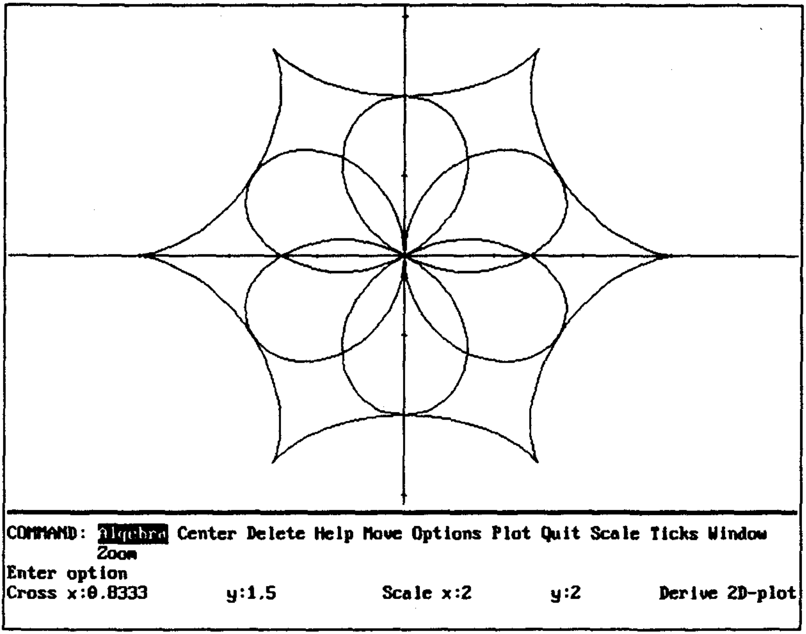



**Рис. 58**

**Задача 8.** Найти подэру циклоиды $[t - \sin t,\ 1 - \cos t]$ относительно точки (0; 0). Постройте обе кривые.

**Задача 9.** Найти подэру кардиоиды
$[2\cos t - \cos 2t,\ 2\sin t - \sin 2t]$ относительно точки (0; 0). Постройте обе кривые.

**Задача 10.** Найти подэру петли $\left[t(t^2-3), \dfrac{3(t^2-2)}{2}\right]$ относительно точки (0; 0). Постройте кривые.

**Задача 11.** Найти подэру декартова листа $\left[\dfrac{3t}{1+t^3}, \dfrac{3t^2}{1+t^3}\right]$ относительно точки (0; 0). Постройте обе кривые.

**Задача 12.** Найти подэру петли $\left[-2t(t^2-2), -2t^2(t^2-2)\right]$ относительно точки $A(0;\ a)$. Постройте петлю и ее подэры при $a = 1$, $a = 2$, $a = 4$.

**Задача 13.** Найти подэру кривой $x^4 - y^4 - 6y^3 + 8x^2y = 0$ относительно точки (0;0). Постройте кривую и ее подэру.

**Задача 14.** Найти подэру кривой $x^3 - (x-y)^2 = 0$ относительно точки $O(2;\ 2)$ (рис. 59).

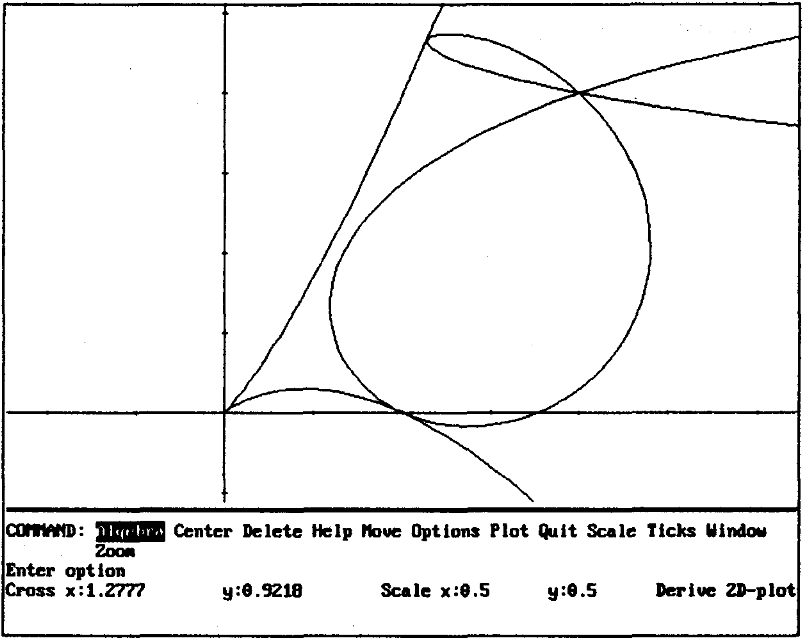



**Рис. 59**

## Подэра кривой, заданной в полярных координатах

Подэру кривой, заданной в полярных координатах, можно найти, предварительно найдя параметрическое задание этой кривой. Для ускорения решения задачи введем функцию

$$\textbf{PODERA\_P}(r, w, z, s, t) := \textbf{PODERA}(r\cos t, r\sin t, w, z, s, t)$$

или, используя функции **UR** и **VR**, эту функцию можно определить так:

$$\textbf{PODERA\_P}(r, w, z, s, t) := \textbf{PODERA}(\textbf{UR}(r, t), \textbf{VR}(r, t), w, z, s, t)$$

**Задача 1**. Построить кривую $r = \sin 4t$ и ее подэру относительно точки (0; 0) (рис. 60).

Р е ш е н и е.

**PODERA_P**$(\sin 4t, 0, 0)$ ↵ S ↵

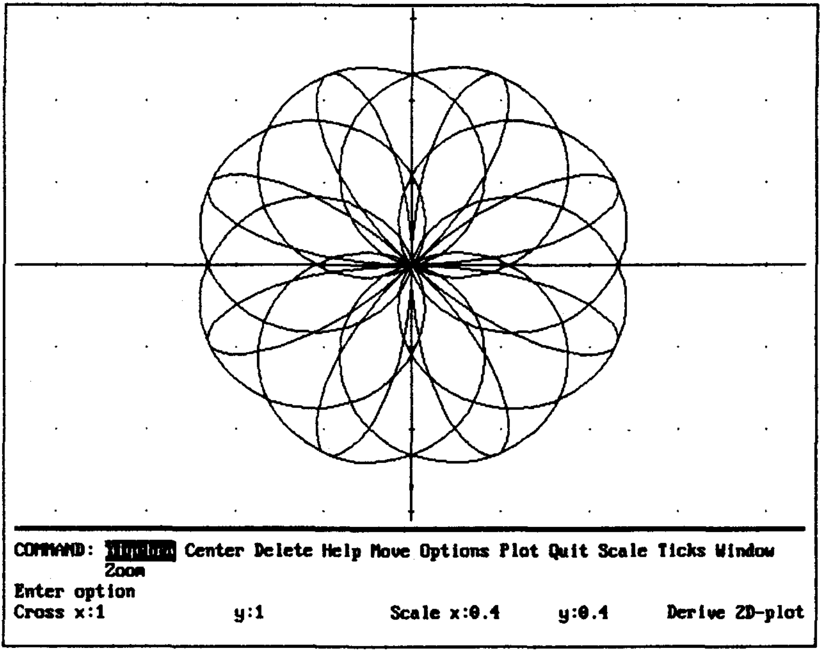



**Рис. 60**

**Задача 2.** Построить кривую $r = \sin\dfrac{5t}{3}$ и ее подэру относительно точки (0; 0).

**Задача 3.** Найти подэру кардиоиды $r = 1 + \cos t$ относительно точек:

а) $A(0; 0)$; б) $B(1; 0)$; в) $C(2; 0)$.

Сделать рисунки.

## Кривизна кривой, заданной в декартовых координатах

***Кривизна*** — величина, характеризующая отклонение кривой от прямой, иначе — искривленность линии в рассматриваемой точке.

Величина, обратная кривизне, называется ***радиусом*** кривизны кривой в данной точке.

Если кривая является графиком дважды дифференцируемой функции $f(x)$, то кривизна $k$ этой кривой может быть найдена по формуле:

$$k = \frac{|f''|}{(1+f'^2)^{3/2}}.$$

(Подробнее см. в книге: Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1964.)

Пусть $(w, z)$ — координаты центра ***соприкасающейся окружности***. Их можно найти по формулам:

$$w = x - \frac{1+f'^2}{f''}, \quad z = y + \frac{1+f'^2}{f''}.$$

Радиус соприкасающейся окружности определяется равенством $R = \dfrac{1}{k}$.

Введем функции

$$\boxed{\mathbf{VSKR}(u,x) := 1 + \mathbf{DIF}(u,x)^2}$$

Это вспомогательная функция, определяющая знаменатель приведенных дробей.

***Замечание.*** На экране отображается

$$\mathbf{VSKR}(u,x) := 1 + \left[\frac{d}{dx}u\right]^2.$$

$$\mathbf{KR1}(u,t,x) := \lim_{x \to t} \frac{\left|\frac{d^2 u}{d x^2}\right|}{\mathbf{VSKR}(u,x)^{3/2}}$$

$$\mathbf{XC\_KR1}(u,t,x) := t - \lim_{x \to t} \frac{\mathbf{VSKR}(u,x)}{\frac{d^2 u}{d x^2}} \frac{d u}{d x}$$

$$\mathbf{YC\_KR1}(u,t,x) := \lim_{x \to t} u + \lim_{x \to t} \frac{\mathbf{VSKR}(u,x)}{\frac{d^2 u}{d x^2}}$$

$$\mathbf{OKR\_KR1}(u,t,x,s) :=$$
$$\left[\mathbf{XC\_KR1}(u,t,x) + \frac{\cos s}{\mathbf{KR1}(u,t,x)}, \mathbf{YC\_KR1}(u,t,x) + \frac{\sin s}{\mathbf{KR1}(u,t,x)}\right]$$

**VSKR** — вспомогательная функция, **KR1** определяет значение кривизны функции *u* в точке с абсциссой *t*, **XC_KR1** и **YC_KR1** определяют соответственно абсциссу и ординату центра соприкасающейся окружности. **OKR_KR1** определяет параметрическое задание соприкасающейся окружности.

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Найти кривизну гиперболы $xy = 4$ при $x = 2$. Построить гиперболу и соприкасающуюся с ней окружность в точке: а) (2; 2); б) (1; 4).

Решение.

1. Найдем кривизну кривой при $x = 2$.

**KR1**(4/*x*, 2) ↵ S ↵. Результат: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

2. Найдем параметрическое задание соприкасающейся окружности.

**OKR_KR1**(4/*x*, 2) ↵ S ↵.

Результат: $\left[2\sqrt{2}\cos S + 4, 2\sqrt{2}\sin S + 4\right]$.

Заметьте, что (4; 4) — центр соприкасающейся окружности.

3. Постройте гиперболу и окружность.

Для большей наглядности можно построить касательную к кривой, проходящую через точку соприкосновения (она является касательной и к соприкасающейся окружности) и радиус окружности, проходящий через точку соприкосновения. Он лежит на нормали к кривой, проходящей через точку (2; 2).

4. **NOR1**(4/*x*, 2) ↵ S ↵. Результат: $y = x$. Один конец радиуса в точке (2; 2), другой — в центре окружности, точке (4; 4). Поэтому мы должны построить отрезок $[x, x]$ при $x \in [2; 4]$. Постройте этот отрезок, а также касательную к кривой.

Введем функцию **RAD_OKR1** (радиус окружности), определяющую параметрическое задание радиуса соприкасающейся окружности, проходящего через точку соприкосновения; его изображение делает рисунок более наглядным. Для этого воспользуемся функцией **LINE1**, введенной ранее.

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{VS\_RAD\_OKR}(u,t,x):=\\ \mathbf{LINE1}(\mathrm{XC\_KR1}(u,t,x),\mathbf{YC\_KR1}(u,t,x),t,\lim\limits_{x\to t}u)\end{array}}$$

$$\boxed{\mathbf{RADX\_OKR1}(u,t,x):=\left[x,\mathbf{VS\_RAD\_OKR1}(u,t,x)\right]}$$

Для облегчения дальнейших расчетов введем функцию **PREDX_RAD_OKR1**, определяющую абсциссы концов радиуса:

$$\boxed{\mathbf{PRED\_RADX\_OKR1}(u,t,x):=\left[\mathbf{XC\_KR1}(u,t,x),t\right]}$$

Мы уже отмечали, что такие составные имена удобны: сначала вы введете функцию **RADX_OKR1**(<функция, значение t>) ↵ S ↵, затем введете **PRED_** и скопируете при помощи клавиши **F3** выражение **RADX_OKR1**(<функция, значение t>).

Если радиус лежит на вертикальной прямой $[a, y]$, то надо вычислить ординаты концов радиуса. Рассуждая аналогично, введем функцию **PRED_RADY_OKR1**:

$$\boxed{\mathbf{PRED\_RADY\_OKR1}(u,t,x):=\left[\lim\limits_{x\to t}u,\mathbf{YC\_KR1}(u,t,x)\right]}$$

Параметрическое задание вертикальной прямой, на которой лежит искомый радиус соприкасающейся окружности, определить очень просто, но при желании можно ввести функцию, определяющую эту прямую. Введите ее самостоятельно и назовите **RADY_OKR1**.

В рассмотренном примере

**RAD_KR1**(4/$x$, 2) ↲ S ↲. Результат: $[x, x]$.

**PRED_RADX_OKR1**(4/$x$, 2) ↲ S ↲. Результат: [4, 2].

Следовательно, надо построить отрезок прямой $[x, x]$ при $x \in [2, 4]$ (рис. 61).

Решите задачу под буквой б) самостоятельно. Сделайте рисунок.

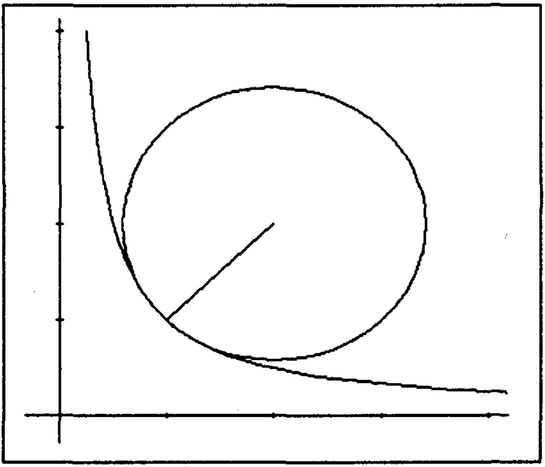


**Рис. 61**

При введении функции **RADX_OKR1** можно воспользоваться не функцией **LINE1**, а функцией **NOR1**, опустив при этом $y$ = (как и при введении функции **LINE1**). Сделаем это.

$$\mathbf{NOR1\_V}(u,t,x) := \lim_{x \to t} u - \frac{x}{\mathrm{K1}(u,t,x)} + \frac{t}{\mathrm{K1}(u,t,x)}$$

$$\mathbf{RADX\_OKR1}(u,t,x) := [x, \mathrm{NOR1\_V}(u,t,x)]$$

Если вы хотите попробовать поработать с обеими функциями **RADX_OKR1**, то к одной из них добавьте, например, **_V**.

**Задача 2.** Построить кривую $-x^2+6x-5$ и соприкасающуюся с ней окружность в точке ее экстремума. Укрупнить рисунок, чтобы хорошо была видна точка соприкосновения. Для большей наглядности ее можно выделить (рис. 62).

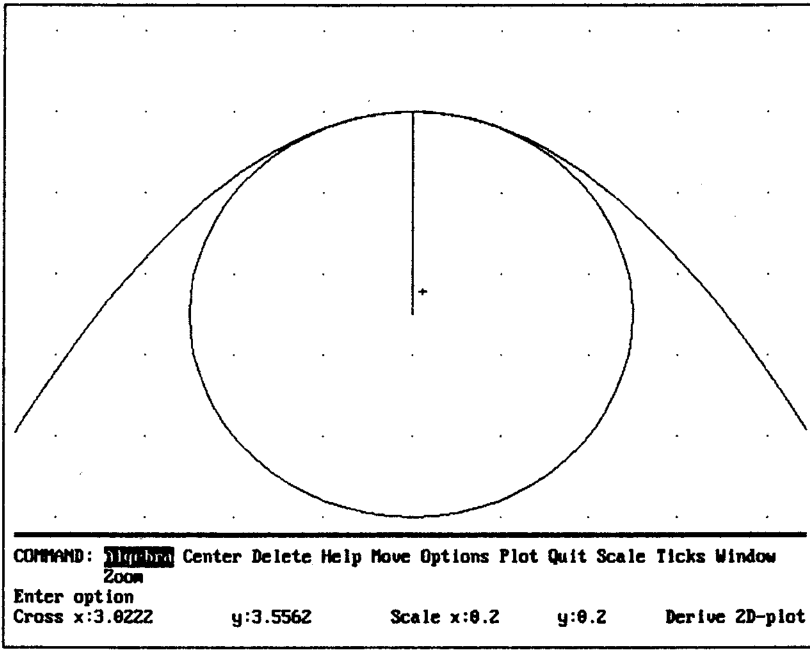



**Рис. 62**

**Задача 3.** Построить кривую $y=\dfrac{x^3-4x^2}{4}$ и соприкасающуюся с ней окружность: а) при $x=3$; б) при $x=-3/8$; в) в точке максимума кривой.

Р е ш е н и е.

1. **OKR_KR1**$\left(\dfrac{x^3-4x^2}{4},3\right)$ ↵ S ↵.

2. **RADX_OKR1**$\left(\dfrac{x^3-4x^2}{4},3\right)$ ↵ S ↵. Результат: $\left[x,\dfrac{7}{4}-\dfrac{4x}{3}\right]$.

3. **PRED_RADX_OKR1** $\left(\dfrac{x^3-4x^2}{4},3\right)$ ↲S ↲. Результат: $\left[\dfrac{81}{32},3\right]$.

Постройте данную кривую, окружность и ее радиус — отрезок прямой $\left[x,\dfrac{7}{4}-\dfrac{4x}{3}\right]$ при $x\in\left[\dfrac{81}{32},3\right]$.

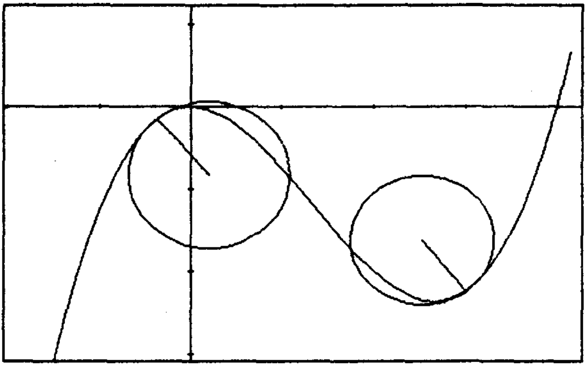


**Рис. 63**

На рис. 63 — решение задач а) и б).

**в)**

1. По графику видно, что функция имеет максимум при $x = 0$. Убедитесь в этом аналитически.

2. **OKR_KR1** $\left(\dfrac{x^3-4x^2}{4},0\right)$ ↲S ↲.

3. В данном случае функция **RAD_OKR1** не дает ответа, так как искомый радиус – отрезок вертикальной прямой:

**RADX_OKR1** $\left(\dfrac{x^3-4x^2}{4},0\right)$ ↲S ↲. Результат: $[x, ?]$.

Надо построить отрезок $[0, y]$ (можно воспользоваться функцией **RADY_KR1** или ввести $[0, y]$ ), для определения пределов изменения $y$ воспользуемся функцией **PRED_RADY_OKR1**.

**PRED_RADY_OKR1** $\left(\dfrac{x^3-4x^2}{4},0\right)$ ↲S ↲. Результат: $\left[0,-\dfrac{1}{2}\right]$.

Сделайте рисунок.

**Задача 4.** Построить кривую $y = \cos x$ и соприкасающуюся окружность при: а) $x_0 = 0$, б) $x_0 = \frac{\pi}{4}$ в) $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: б) $\left[\frac{3\sqrt{3}\cos S}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}\sin S}{2} - \sqrt{2}\right]$,

радиус $\left[x, -\frac{\sqrt{2}\pi}{4} + \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, где $x \in \left[\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$.

в) Заметьте, что точка $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ — точка перегиба кривой $y = \cos x$. В точке перегиба кривизна равна нулю.

**Задача 5.** Построить кривую $y = \ln x$ и соприкасающуюся с ней окружность при $x_0 = 1$.

Ответ: $\left[2\sqrt{2}\cos S + 3, 2\sqrt{2}\sin S - 2\right]$, радиус $[x, 1 - x]$ при $x \in [1,3]$.

**Задача 6.** Построить кривую $y = -x^2 + 3x$ и соприкасающуюся с ней окружность при $x_0 = \frac{1}{2}$.

**Задача 7.** Построить кривую $y = -x^2 + 3x$. Найти экстремальное значение кривизны этой кривой, построить соответствующую соприкасающуюся окружность. Оценить зрительно кривизну в этих точках.

Решение.

1. Ясно, что в своей вершине парабола имеет наибольшую кривизну. Убедимся в этом.

**DIF**$(-x^2 + 3x, x)$ ↵ S ↵ L ↵. Результат: $x = 3/2$.

2. **OKR_KR1** $(-x^2 + 3x, 3/2)$ ↵ S ↵.

Результат: $\left[\frac{\cos S}{2} + \frac{3}{2}, \frac{\sin S}{2} + \frac{7}{4}\right]$.

3. Так как касательная к параболе, проведенная через ее вершину, — горизонтальная прямая (как и касательная к любой кривой $y = f(x)$, проведенная через точку ее экстремума), то соответствующая ей нормаль — вертикальная прямая. Ее уравнение $x = 3/2$, так как центр соприкасающейся окружнос-

ти лежит в точке $\left[\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right]$. Следовательно, надо построить отрезок прямой $\left[\frac{3}{2},y\right]$. Если вы ввели функцию **RADY_OKR1**, то можно воспользоваться ею, получим $\left[\frac{3}{2},y\right]$.

3. Определим пределы изменения переменной $y$.

**PREDY_RAD_OKR1** $(-x^2+3x,3/2)$ ↵ S ↵.

Результат: $\left[\frac{9}{4},\frac{7}{4}\right]$.

Постройте параболу, окружность, ее радиус — отрезок $\left[\frac{3}{2},y\right]$, где $y\in\left[\frac{9}{4},\frac{7}{4}\right]$. Постройте также касательную, проходящую через вершину параболы.

**Задача 8.** Найти экстремальное значение кривизны кривой $y = \ln x$. Сделать соответствующий рисунок.

***Указание.*** При вычислениях учтите, что $x > 0$.

Ответ: при $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

## Кривизна кривой, заданной параметрически

Пусть кривая задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда ее кривизна и координаты центра соприкасающейся окружности $(w, z)$ могут быть найдены по формулам

$$k=\frac{1}{R}=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}},\quad w=x-y'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'},\quad z=y+x'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'},$$

где $R$ — радиус соприкасающейся окружности.

Пусть задана кривая $[u(t),v(t)]$.

Введем функции

$$\mathbf{VSKR2}(u,v,t) := \left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right]^2 + \left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right]^2$$

$$\mathbf{VSPKR2}(u,v,t) := \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathbf{KR2}(u,v,s,t) := \lim_{t \to s} \frac{|\mathrm{VSPKR\ 2}(u,v,t)|}{\mathrm{VSKR\ 2}(u,v,t)^{3/2}}$$

$$\mathbf{VSMNKR2}(u,v,t) := \frac{\mathrm{VSKR\ 2}(u,v,t)}{\mathrm{VSPKR\ 2}(u,v,t)}$$

$$\mathbf{XC\_KR2}\ (u,v,s,t) := \lim_{t \to s} u - \lim_{t \to s}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathbf{VSMNKR2}\ (u,v,t)\right)$$

$$\mathbf{YC\_KR2}(u,v,s,t) := \lim_{t \to s} v + \lim_{t \to s}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathbf{VSMNKR2}(u,v,s,t)\right)$$

$$\mathbf{OKR\_KR2}(u,v,s,t) :=$$
$$\left[\mathbf{XC\_KR2}(u,v,s,t) + \frac{\cos w}{\mathbf{KR2}(u,v,s,t)}, \mathbf{YC\_KR2}(u,v,s,t) + \frac{\sin w}{\mathbf{KR2}(u,v,s,t)}\right]$$

$$\mathbf{VS\_RAD\_OKR\,2}(u,v,s,t) :=$$
$$\mathbf{LINE1}(\mathrm{XC\_KR\,2}(u,v,s,t), \mathbf{YC\_KR2}(u,v,s,t), \lim_{t \to s} u, \lim_{t \to s} v)$$

$$\mathbf{RADX\_OKR}\,2(u,v,s,t) := [x, \mathbf{VS\_RAD\_OKR\,2}(u,v,s,t)]$$

$$\mathbf{PRED\_RADX\_OKR2}(u,v,s,t) := \left[\mathbf{XC\_KR}(u,v,s,t), \lim_{t \to s} u\right]$$

$$\mathbf{RADY\_OKR2}\,(u,v,s,t) := \left[\lim_{t \to s} u, y\right]$$

$$\mathbf{PRED\_RADY\_OKR2}(u,v,s,t) := \left[\mathbf{YC\_KR}(u,v,s,t), \lim_{t \to s} v\right]$$

Смысл функций тот же, что и в случае задания функции в декартовых координатах.

*Замечание.* Можно ввести функции **X_KAS2** и **Y_KAS2** (X касания, Y касания) и использовать их при введении последних пяти функций, тогда структура этих функций будет более понятной.

$$\mathbf{X\_KAS2}(u,s,t) := \lim_{t \to s} u \qquad \mathbf{Y\_KAS2}(v,s,t) := \lim_{t \to s} v$$

Введите функцию **NOR2_V** (опустив в **NOR2** $y =$) и второй вариант функции **RADX_OKR2**.

$$\mathbf{RADX\_OKR2}(u,v,s,t) := [x, \mathbf{NOR2\_V}(u,v,s,t)]$$

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Построить кривую $[-2t(t^2-2), -2t^2(t^2-2)]$ и соприкасающуюся с ней окружность при: а) $t = 1$, б) $t = 1/2$, в) $t = 0$.

Решение.

а)

1. **OKR_KR2** $(-2t(t^2-2), -2t^2(t^2-2), 1)$ ↵ S ↵.

Результат: $\left[\dfrac{\cos w}{4} + 2, \dfrac{\sin w}{4} + \dfrac{7}{4}\right]$.

2. **RADX_OKR2** $(-2t(t^2-2), -2t^2(t^2-2), 1)$ ↵ S ↵.

Результат: $[x, ?]$.

Следовательно, искомый радиус лежит на вертикальной прямой. Уравнение прямой $x = u(1)$, то есть $x = 2$. Можно воспользоваться функцией **PRED_RADX_OKR2**, в результате получим [2, 2], значит, уравнение прямой $x = 2$. Это видно и по заданию соприкасающейся окружности: абсцисса центра окружности равна 2. Можно также использовать функцию **X_KAS2** или функцию **RADY_OKR2**:

**RADY_OKR2** $(-2t(t^2-2), -2t^2(t^2-2), 1)$ ↵ S ↵.

Результат: $[2, y]$.

Итак, надо построить отрезок прямой $[2, y]$.

3. Найдем пределы для $y$, используя функцию **PRED_RADY_OKR2**.

**PRED_RADY_OKR2**$(-2t(t^2-2),-2t^2(t^2-2),1)$ ↲ S ↲.

Результат: $\left[\frac{7}{4},2\right]$.

Сделайте рисунок.

б)

1. **OKR_KR2**$(-2t(t^2-2),-2t^2(t^2-2),1/2)$ ↲ S ↲.
2. **RADX_OKR2**$(-2t(t^2-2),-2t^2(t^2-2),1/2)$ ↲ S ↲.

Результат: $\left[x,\frac{7}{3}-\frac{5x}{6}\right]$.

3. **PRED_RADX_OKR2**$(-2t(t^2-2),-2t^2(t^2-2),1/2)$ ↲ S ↲.

Результат: $\left[-\frac{11}{46},\frac{7}{4}\right]$.

Сделайте рисунок (рис. 64).

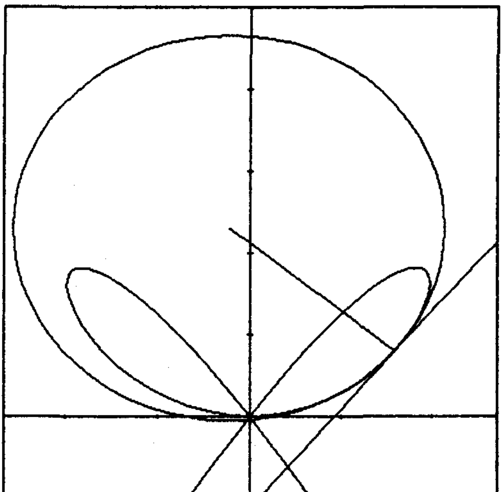


**Рис. 64**

Решите задачу под буквой в) самостоятельно.

**Задача 2.** Построить циклоиду $[t-\sin t, 1-\cos t]$ и соприкасающуюся с ней окружность при: а) $t=\dfrac{\pi}{2}$ ; б) $t=\pi$.

Ответ: а) окружность $\left[\dfrac{\pi}{2}+1+2\sqrt{2}\cos w, -1+2\sqrt{2}\sin w\right]$ радиус $\left[x, \dfrac{\pi}{2}-x\right]$ при $x\in\left[\dfrac{\pi}{2}-1, \dfrac{\pi}{2}+1\right]$.

б) окружность $\left[4\cos w+\pi, 4\sin w-2\right]$, радиус $[\pi, y]$, где $y\in[-2,2]$.

**Задача 3.** Построить гипоциклоиду $[2\cos t+\cos 2t, 2\sin t-\sin 2t]$ и соприкасающуюся с ней окружность при $t=\pi$.

Ответ: окружность $[8\cos w-9, 8\sin w]$, радиус $[x,0]$ при $x\in[-9,-1]$.

**Задача 4.** Построить астроиду $\left[\cos^3 t, \sin^3 t\right]$ и соприкасающуюся с ней окружность при $t=\pi/4$.

Ответ: окружность $\left[\dfrac{3}{2}\cos w+\sqrt{2}, \dfrac{3}{2}\sin w+\sqrt{2}\right]$, радиус $[x,x]$ при $x\in\left[\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \sqrt{2}\right]$.

**Задача 5.** Построить гипоциклоиду $[5\cos t+\cos 5t, 5\sin t-\sin 5t]$ и соприкасающуюся с ней окружность при $t=\pi/2$.

**Задача 6.** Построить кривую $\left[t(t^2-3), \dfrac{3(t^2-2)}{2}\right]$ и соприкасающуюся с ней окружность при том $t$, при котором: а) функция $x=x(t)$ имеет экстремум; б) функция $y=y(t)$ имеет экстремум.

Решение.

Функция $x=x(t)$ — нечетная, $y=y(t)$ — четная. Следовательно, кривая симметрична относительно оси ординат.

а)

1. Найдем значение $t$, при котором функция $x=x(t)$ имеет экстремум.

**DIF** $(t(t^2-3), t)$ ↲ S ↲ L ↲. Результат: $t=1$, $t=-1$.

2. **OKR_KR2** $(t(t^2-3),3(t^2-2)/2,1)$ ↲ S ↲.

3. Ясно, что радиус окружности, проходящий через точку соприкосновения, лежит на горизонтальной прямой. Уравнение этой прямой $y = v(-1) \Rightarrow\ y = -\dfrac{3}{2}$. Можно также воспользоваться функцией **RAD_KR2**.

**RADX_OKR2** $(t(t^2-3),3(t^2-2)/2,1)$ ↲ S ↲.

Результат: $\left[x, -\dfrac{3}{2}\right]$.

**PRED_RADX_KR2** $(t(t^2-3),3(t^2-2)/2,1)$ ↲ S ↲ .

Результат: $\left[-2, -\dfrac{1}{2}\right]$ (рис. 65).

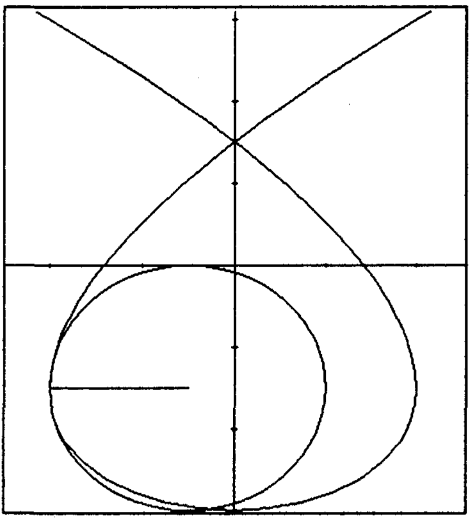


**Рис. 65**

Вторую окружность и ее радиус можно построить, используя симметрию кривой относительно оси ординат, или снова проделать вычисления при $t = 1$.

б) Очевидно, кривая $y = y(t)$ имеет минимум при $t = 0$.

Ответ: $[3\cos t, 3\sin t]$, радиус $[0, y]$ при $y \in [-3, 0]$.

**Задача 7.** Получить параметрическое задание кривой $(x^2-y^2)(x-y)=4x^2$, построить кривую и соприкасающуюся с ней окружность при том $t$, при котором функция $x(t)$ имеет экстремальное значение.

Решение.

1. Перейдем к параметрическому заданию кривой. Разложите знаменатели полученных дробей на множители.

Результат: $\left[\dfrac{4}{(t-1)^2(t+1)}, \dfrac{4t}{(t-1)^2(t+1)}\right]$.

2 . Убедитесь в том, что $x_t' = 0$ при $t=-\dfrac{1}{3}$.

3. **OKR_KR2** $(4/((t-1)^2(t+1)), 4t/((t-1)^2(t+1)), -1/3)$ ↵ S ↵.

Результат: $\left[\cos w+\dfrac{35}{8}, \sin t-\dfrac{9}{8}\right]$.

Радиус $\left[x, -\dfrac{9}{8}\right]$ при $x\in\left[\dfrac{27}{8}, \dfrac{35}{8}\right]$.

**Задача 8.** Построить кривую $x^3+y^3=x^2+y^2$ и соприкасающуюся с ней кривую в точке, лежащей в первой четверти и максимально удаленной от точки $(0; 0)$.

Решение.

Функция $F(x,y)=x^3y^3-x^2-y^2$ симметрична относительно аргументов $x$ и $y$, то есть $F(x, y) = F(y, x)$. Следовательно, кривая симметрична относительно прямой $y = x$.

1. Перейдите к параметрическому заданию кривой. Результат: $\left[\dfrac{t^2+1}{t^3+1}, \dfrac{t(t^2+1)}{t^3+1}\right]$. Построение этой кривой мы рассмотрели ранее. Кривая имеет наклонную асимптоту $y=\dfrac{3}{4}-x$.

2. По кривой устанавливаем, что наиболее удаленная от начала координат точка кривой, лежащая в первой координатной четверти, — это точка $(1;1)$. Нетрудно установить, что $x = 1$ и $y = 1$ при $t = 1$.

3. Найдем уравнение соприкасающейся окружности при $t = 1$.

Результат: $\left[\frac{\sqrt{2}\cos w}{4}+\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{2}\sin w}{4}+\frac{3}{4}\right]$.

Радиус $[x, x]$ при $x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$ (рис. 66).

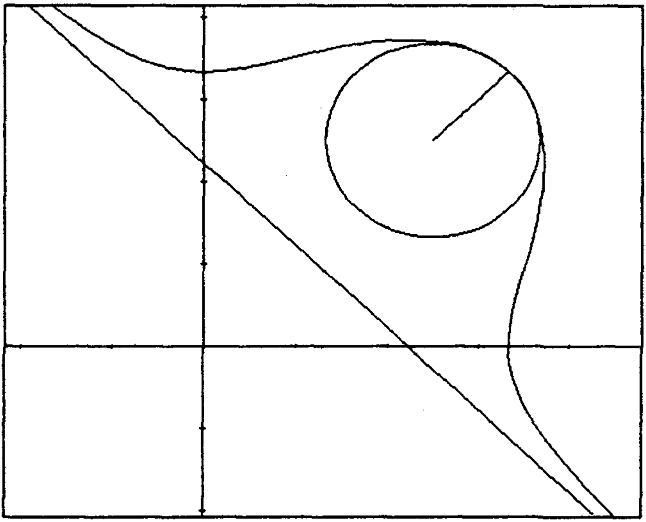


**Рис. 66**

**Задача 9.** Построить кривую $xy - y^2 = x$ и соприкасающуюся с ней окружность при том $t$, при котором функция $x(t)$ имеет экстремум.

Ответ: окружность $\left[\frac{\cos w}{2}-\frac{1}{2}, \frac{\sin w}{2}\right]$, радиус $[x, 0]$ при $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ и окружность $\left[\frac{\cos w}{2}+\frac{9}{2}, \frac{\sin w}{2}+2\right]$, радиус $[x, 2]$ при $x \in \left[4, \frac{9}{2}\right]$.

**Задача 10.** Построить кривую $\left[\frac{t}{(t+1)^4}, \frac{t^2}{(t+1)^4}\right]$. Найти уравнение соприкасающейся окружности в точке кривой, лежащей в первой четверти и максимально удаленной от начала координат.

Решение.

Нам известно, что расстояние между двумя точками $(a;b)$ и $(c;d)$, лежащими в одной плоскости, находится по формуле $l = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$. В данном случае $a = x(t)$, $b = y(t)$, $c = d = 0$. Следовательно, надо найти значения $t$, при которых функция $x^2(t) + y^2(t)$ имеет максимум.

Найдите производную этой функции и убедитесь в том, что она имеет максимум при $t \approx 0.3966$. При нахождении параметрического задания соприкасающейся окружности используйте approX (то есть X ↵).

Результат: $[0.0189\cos w + 0.0.0867, 0.0189\sin w + 0.0344]$.

Радиус $[x, 0.397x]$, $x \in [0.0867; 0.1042]$. Для большей наглядности постройте касательную при найденном $t$.

**Задача 11.** Построить соприкасающиеся окружности к кривой $x^3 - y^3 - x^2 = 0$ в тех точках кривой, в которых ее кривизна имеет экстремальное значение.

Решение.

1. Перейдите к параметрическому заданию кривой. Результат: $\left[-\frac{1}{t^3-1}, -\frac{t}{t^3-1}\right]$.

2. Найдем уравнения асимптот кривой.

**ASN2**$\left(-\frac{1}{t^3-1}, -\frac{t}{t^3-1}, 1\right)$ ↵ S ↵. Результат: $y = x - \frac{1}{3}$.

Найдите экстремальные значения кривизны данной кривой.

3. **KR2**$\left(-\frac{1}{t^3-1}, -\frac{t}{t^3-1}\right)$ ↵ S ↵.

4. Найдите производную полученного выражения по переменной $s$.

5. Постройте график полученной функции и по нему определите точки экстремума. Мы видим, что производная меняет знак в трех точках, в точке $s \approx -1.49$ она меняет знак с минуса на плюс, следовательно, при этом значении кривизна принимает минимальное значение, а радиус кривизны — максимальное значение. В точке $s \approx -0.53$ и в точке $s \approx 0.30$ производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, при этих значениях аргумента кривизна имеет максимальное значение, а радиус кривизны – минимальное значение.

6. Найдите параметрическое задание соприкасающихся окружностей при найденных значениях аргумента.

7. Постройте данную кривую и найденные окружности (рис. 67). Вблизи какой-либо из окружностей постройте еще несколько окружностей, убедитесь в том, что найденные решения верны. В какой точке кривой кривизна наибольшая?

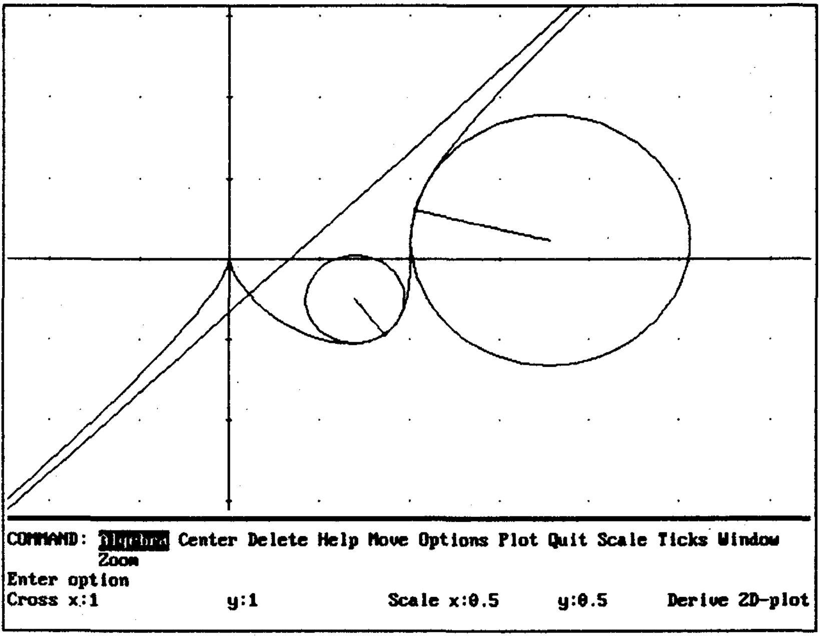



**Рис. 67**

***Замечание***. На рис. 67 изображены две из трех нужных соприкасающихся окружностей.

**Задача 12.** Построить кривую $\left[\dfrac{t}{t^2-1}, \dfrac{t^2}{t-1}\right]$ и окружности, соприкасающиеся с ней в точках ее экстремума.

**Задача 13.** Построить кривую $\left[\dfrac{t^2}{t-1}, \dfrac{t^2-1}{t}\right]$ и окружность, соприкасающуюся с ней в точке минимума функции $u(t)$.

**Задача 14.** Построить кривую $\left[\dfrac{t^2}{1-t^2}, \dfrac{t^3}{1-t^3}\right]$ и окружность, соприкасающуюся с ней в точке, в которой кривизна имеет наибольшее значение (рис. 68).

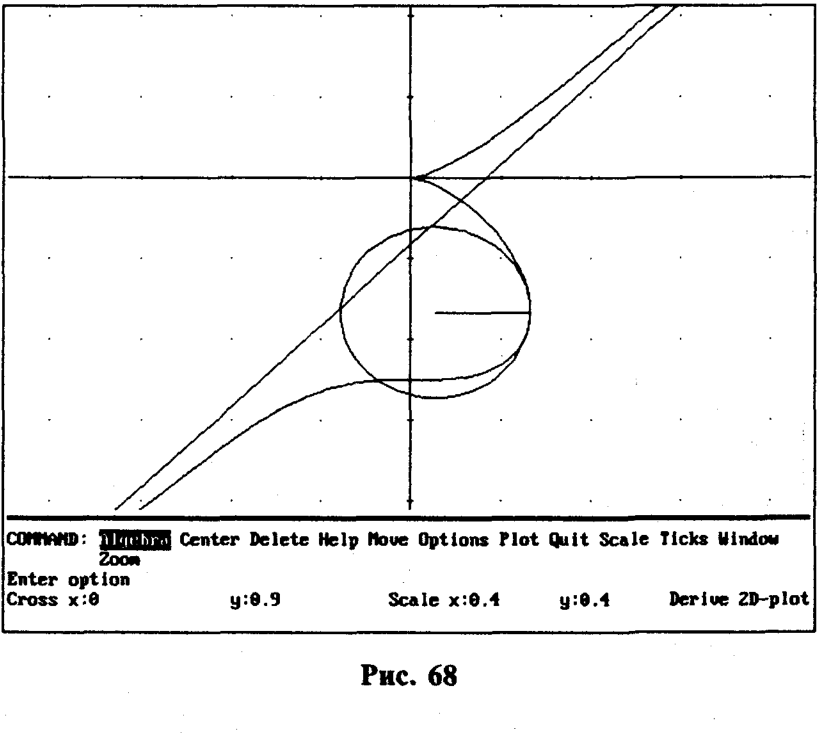



**Рис. 68**

**Задача 15.** На рис. 69 изображена кривая $\left[4t^2, \dfrac{1}{t^2+t-2}\right]$ и соприкасающиеся с ней окружности. Выполнить такой рисунок.

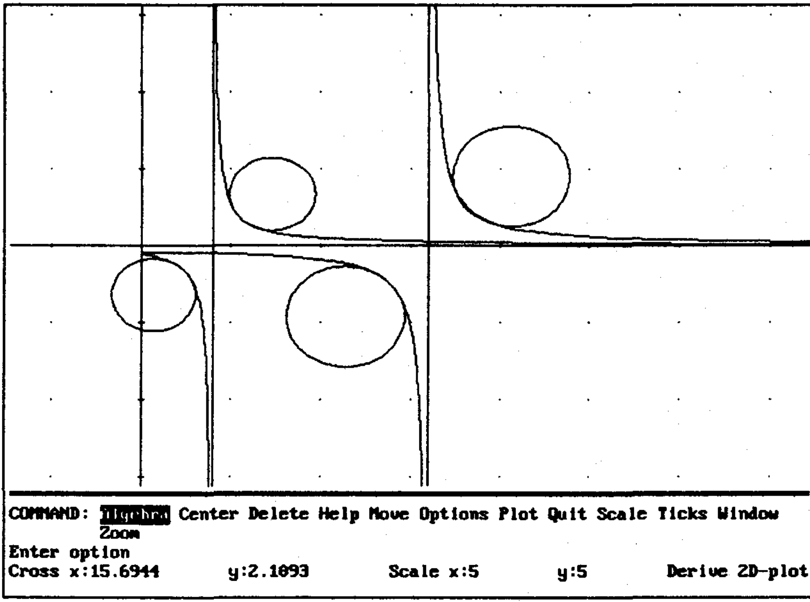



**Рис. 69**

## Кривизна кривой, заданной в полярных координатах

Пусть задана кривая $r = \varphi(t)$. Ее кривизна вычисляется по формуле

$$k = \frac{1}{R} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}.$$

Введем функции

$$\boxed{\mathbf{VSKR3}(r,t) := r^2 + \left[\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right]^2}$$

$$\mathbf{KP3}(r,s,t) := \lim_{t \to s} \frac{\left| r^2 + 2\left[\frac{dr}{dt}\right]^2 - r\frac{d^2 r}{dt^2} \right|}{\mathrm{VSKR3}(r,t)^{3/2}}$$

Для определения соприкасающейся окружности воспользуемся формулами перехода от задания кривой в полярных координатах к ее параметрическому заданию. В дальнейших формулах участвуют функции перехода **UR** и **VR**. Как вы знаете, можно обойтись и без них (**UR** = $r\cos t$, **VR** = $r\sin t$).

$$\mathbf{VSPKR3}(r,t) := \frac{d}{dt}\mathrm{UR}(r,t) \cdot \frac{d^2}{dt^2}\mathrm{VR}(r,t) - \frac{d^2}{dt^2}\mathrm{UR}(r,t) \cdot \frac{d}{dt}\mathrm{VR}(r,t)$$

$$\mathbf{VSMNKR3}(r,t) := \frac{\mathrm{VSKR3}(r,t)}{\mathrm{VSPKR3}(r,t)}$$

$$\mathbf{XC\_KR3}(r,s,t) := \lim_{t \to s}\mathrm{UR}(r,t) - \lim_{t \to s}\left(\frac{d}{dt}\mathrm{VR}(r,t) \cdot \mathrm{VSMNKR3}(r,t)\right)$$

$$\mathbf{YC\_KR3}(r,s,t) := \lim_{t \to s}\mathrm{VR}(r,t) + \lim_{t \to s}\left(\frac{d}{dt}\mathrm{UR}(r,t) \cdot \mathrm{VSMNKR3}(r,t)\right)$$

$$\mathbf{OKR\_KR3}(r,s,t) :=$$

$$\left[\mathrm{XC\_KR3}(r,s,t) + \frac{\cos q}{\mathrm{KR3}(r,s,t)}, \mathrm{YC\_KR3}(r,s,t) + \frac{\sin q}{\mathrm{KR3}(r,s,t)}\right]$$

Смысл функций тот же, что и в предыдущих случаях.

Можно определить кривизну и задание соприкасающейся окружности, используя введенные ранее функции KR2 и OKR_KR2. Сделаем это.

$$\mathbf{KR32}(r,s,t) := \mathbf{KR2}(\mathbf{UR}(s,t),\mathbf{VR}(s,t))$$

$$\mathbf{OKR\_KR32}(r,s,t) :=$$
$$\left[\mathbf{XC\_KR2}(\mathbf{UR}(r,t),\mathbf{VR}(r,t)) + \frac{\cos q}{\mathbf{KR2}(\mathbf{UR}(r,t),\mathbf{VR}(r,t))},\ \mathbf{YC\_KR2}(\mathrm{UR}(r,t),\mathbf{VR}(r,t)) + \frac{\sin q}{\mathbf{KR2}(\mathbf{UR}(r,t),\mathbf{VR}(r,t))}\right]$$

Тогда не надо вводить все приведенные выше функции (**VSKR3**, **K3**, **VSPKR3** и т.д.).

Можно в последней формуле вместо функции **KR2** использовать функцию **KR3**, тогда предварительно надо ввести функции **VSKR3** и **KR3**. Введите эту функцию, назовите ее, например, **OKR_KR32_V**. Легко убедиться на примерах, что несколько медленнее других работает функция **OKR_KR32**, быстрее всех — функция **OKR_KR3**.

Дальнейшие функции приведены в предположении, что введена функция **OKR_KR3** (и, следовательно, все предыдущие из этого пункта).

Для определения координат точки касания введем функции **X_KAS3**, **Y_KAS3**, **KOOR_KAS3**.

$$\mathbf{X\_KAS3}(r,s,t) := \lim_{t\to s}\mathrm{UR}(r,t) \qquad \mathbf{Y\_KAS3}(r,s,t) := \lim_{t\to s}\mathrm{VR}(r,t)$$

$$\mathbf{KOOR\_KAS\,3}(r,s,t) := [\mathbf{X\_KAS}(r,s,t),\mathbf{Y\_KAS}(r,s,t)]$$

Введем функции, определяющие радиус окружности, проходящий через точку соприкосновения, и пределы для абсциссы или ординаты этого отрезка.

$$\mathbf{VS\_RAD\_OKR3}(r,s,t) :=$$
$$\mathbf{LINE1}(\mathbf{XC\_KR3}(r,s,t),\mathbf{YC\_KR3}(r,s,t),$$
$$\mathbf{X\_KAS3}(r,s,t),\mathbf{Y\_KAS3}(r,s,t))$$

$$\boxed{\mathbf{RADX\_OKR3}(r,s,t):=\left[x, \mathbf{VS\_RAD\_OKR3}(r,s,t)\right]}$$

$$\boxed{\mathbf{PRED\_RADX\_OKR3}(r,s,t):=\left[\mathbf{XC\_KR3}(r.s.t), \mathbf{X\_KAS3}(r,s,t)\right]}$$

$$\boxed{\mathbf{RADY\_OKR3}(r,s,t):=\left[\mathbf{X\_KAS}(r,s,t), y\right]}$$

$$\boxed{\mathrm{PRED\_RAD\,YROKR3}(r,s,t):=\left[\mathrm{YC\_KR3}(r.s.t), \mathrm{Y\_KAS3}(r,s,t)\right]}$$

Функции **RADY_OKR3** и **PRED_RADY_OKR3** используются, когда радиус соприкасающейся окружности, проходящий через точку соприкосновения, лежит на вертикальной прямой.

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Построить кривую $r = \dfrac{2}{\sqrt{\cos 4t + 3}}$ и соприкасающиеся с ней окружности при $t = \dfrac{\pi k}{4}$, где $r = \dfrac{2}{\sqrt{\cos 4t + 3}}$.

Решение.

Эту кривую мы строили ранее. По ее виду можно ожидать, что центры искомых соприкасающихся окружностей лежат на прямых $y = x$ и $y = -x$, а точки соприкосновения — точки (1; 1), (1, –1), (–1, 1), (–1, –1).

Пусть $k = 1$, то есть $t = \pi/4$.

1. **OKR_KR3** $(2/\sqrt{\cos 4t + 3}, \pi/4)$ ↵ S ↵.

Результат: $\left[\dfrac{\sqrt{2}\cos q}{5} + \dfrac{4}{5}, \dfrac{\sqrt{2}\sin q}{5} + \dfrac{4}{5}\right]$.

2. Ясно, что центр полученной окружности (4/5, 4/5) лежит на прямой $y = x$, поэтому можно сразу ввести $[x, x]$. Или воспользоваться функцией **RAD_OKR3**:

**RADX_OKR3** $(2/\sqrt{\cos 4t + 3}, \pi/4)$ ↵ S ↵. Результат: $[x, x]$.

3. Определим пределы изменения переменной $x$.

**PRED_RADX_OKR3** $(2/\sqrt{\cos 4t + 3}, \pi/4)$ ↵ S ↵. Результат: $\left[\dfrac{4}{5}, 1\right]$.

Следовательно, мы должны построить отрезок $[x, x]$ при $x \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$.

Постройте заданную кривую, окружность и ее радиус (рис. 70).

Продолжите самостоятельно решение задачи при $k = 2$ (рис. 71), $k = 3$, $k = 4$.

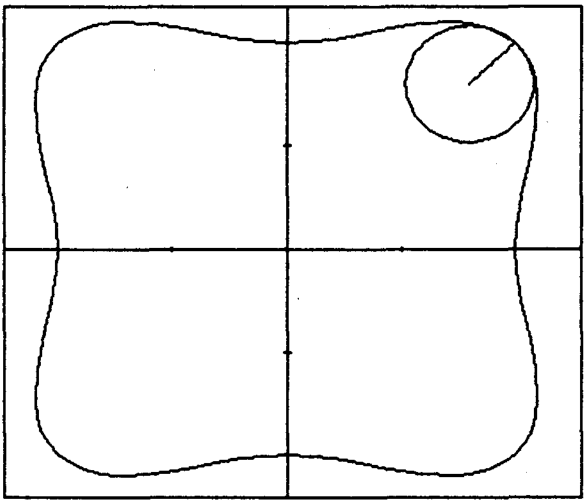


**Рис. 70**

**Задача 2.** Построить кардиоиду $r = 1 + \cos t$, соприкасающуюся с ней окружность при: а) $t = 0$; б) $t = 3\pi/2$, радиус окружности, проходящий через точку соприкосновения, касательную, проходящую через эту точку.

Ответ: б) радиус $[x, x-1]$ при $x \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$, (рис. 72).

**Задача 3.** Построить лемнискату $r = \sqrt{\cos 2t}$ и соприкасающуюся с ней окружность при $t = 0$.

Ответ: $\left[\frac{\cos q}{3} + \frac{2}{3}, \frac{\sin q}{3}\right]$, радиус $[x, 0]$, $x \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$.

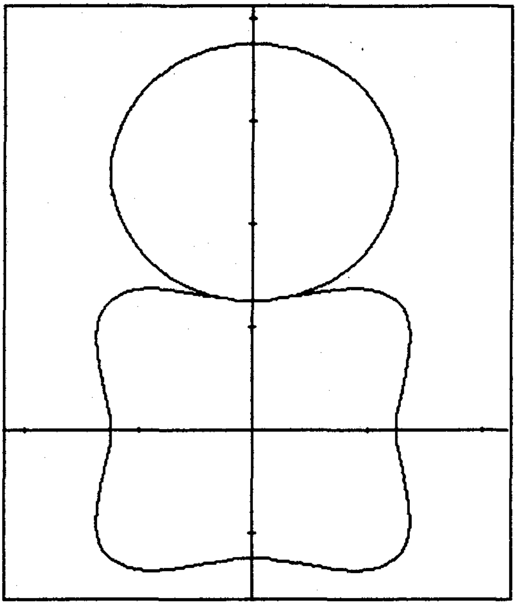


**Рис. 71**

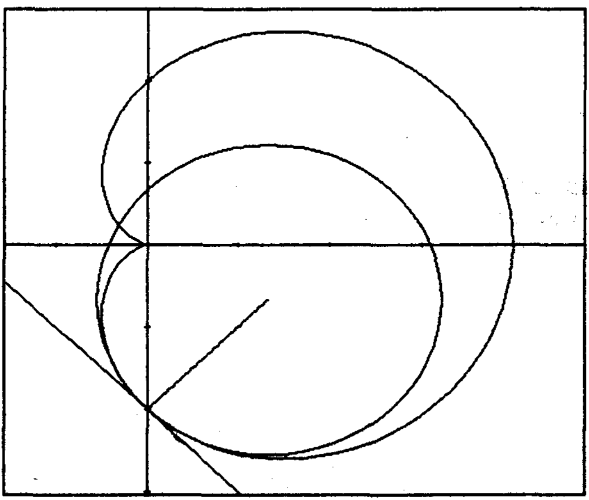


**Рис. 72**

**Задача 4.** Построить кардиоиду $r = 1 + \cos t$. Зрительно оценить, как меняется кривизна при изменении $t$ от 0 до $\pi$. Построить соприкасающиеся с кардиоидой окружности при $t = 0$, $t = \frac{\pi}{3}$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \frac{5\pi}{6}$, $t = \frac{9\pi}{10}$, $t = \pi$. Вновь зрительно оценить изменение кривизны.

Очевидно, что при $t \to \infty$ $R \to 0 + 0 \Rightarrow k \to +\infty$. Вы видите, как при $t = \pi$ соприкасающаяся окружность вырождается в точку [0, 0].

**Задача 5.** Построить кривую $r = \cos 3t$ и соприкасающуюся с ней окружность в точке, наиболее удаленной от начала координат.

Решение.

Очевидно, наиболее удалены точки от начала координат при $\cos t = 1$, то есть при $t = 0$, $t = 2\pi/3$, $t = -2\pi/3$.

Продолжите решение задачи самостоятельно.

Постройте касательные к кривой, проходящие через точки соприкосновения (рис. 73).

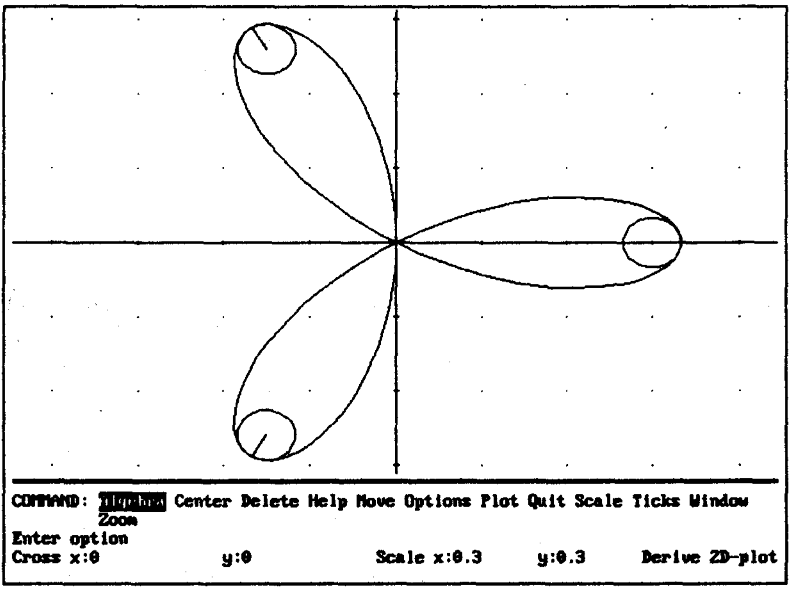



Рис. 73

**Задача 6.** Построить кривую $r = \sin\frac{t}{3}$ и окружности, соприкасающиеся с этой кривой в точках ее самопересечения.

Решение.

Постройте кривую. По ее виду ясно, что она самопересекается при $x(t) = 0$. Решим уравнение **UR**(sin(*t*/3)) = 0.

**UR**(sin(*t*/3)) ↵ S ↵. Результат: $\sin\frac{t}{3}\cos t$ L ↵.

Результат: $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, кривая самопересекается при $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = -\frac{\pi}{2}$.

Продолжите решение задачи.

**Задача 7.** Построить кардиоиду $r = 1 + \cos t$ и соприкасающиеся с ней окружности в точках, где: а) абсцисса, б) ордината принимают наибольшее или наименьшее значение.

Решение.

а)

1. Найдем функцию $x(t)$, задающую абсциссу кривой.

**UR**(1+cost) ↵ S ↵. Результат: $\cos t + \cos^2 t$.

2. Найдем точки, в которых производная этой функции обращается в ноль.

**DIF**( $\cos t + \cos^2 t$ ,*t*) ↵ S ↵. Результат: $-2\sin t\cos t - \sin t$.

Результат $t = 0$, $t = \frac{2\pi}{3}$. Так как функция $x(t)$ четная, надо рассмотреть также случай $t = -\frac{2\pi}{3}$.

Пусть $t = \frac{2\pi}{3}$. Искомая окружность $\left[\frac{2\cos q}{3} + \frac{5}{12}, \frac{2\sin q}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$, ее радиус $\left[x, \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$, где $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{5}{12}\right]$.

**X_KAS**(1+cos*t*,2π/3) ↵ S ↵. Результат: $-\frac{1}{4}$.

Следовательно, уравнение касательной к кривой в точке соприкосновения $x = -\frac{1}{4}$.

Постройте кардиоиду, окружность, ее радиус и касательную к кардиоиде — отрезок $\left[-\frac{1}{4}, y\right]$, например, при $y \in [-2, 2]$.

Продолжите решение задачи при $t = -2\pi/3$ и при $t = 0$.

б) Найдем нули производной функции $y(t)$.

**DIF(VR**(1+cos$t$, $t$) ↲ S ↲ L ↲. Результат: $t = \frac{\pi}{3}, t = \pi$.

Продолжите решение задачи самостоятельно. Учтите, что функция $y(t)$ является нечетной. Сделайте рисунок.

**Задача 8.** Построить кривую $r = \sin\frac{t}{3}$ и соприкасающиеся с ней окружности в точках, где: а) абсцисса; б) ордината достигают своих экстремальных значений.

Решение.

а) Установите M T Collect.

1. Найдем производную функции $x(t)$.

**DIF(UR**$(\sin(t/3), t)$ ↲ S ↲.

2. Выделите $t$, замените на $3u/2$, установите M T Expand, L ↲.

3. В полученных равенствах замените $u$ на $2t/3$, X ↲ L ↲ X ↲. Результаты $t = 3.30846$, $t = 0.851728$. Так как функция $x(t)$ нечетная, то надо найти соприкасающиеся окружности также при $t = -3.30846$, $t = -0.851728$.

**OKR_KR3**$(\sin(t/3), 3.3085)$ ↲ X ↲ (или ↲ S ↲ X ↲ )

Продолжите решение задачи. Сделайте чертеж.

б) Установите M T Expand.

1. Найдем производную функции $y(t)$.

**DIF(VR**$(\sin(t/3), t)$ ↲ S ↲ .

2. Выделите $t$ курсором, замените на $3u$, L ↲.

Результат: $u = 0, u = \frac{\pi}{2}, u = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{15}{3}, u = \operatorname{arctg}\frac{15}{3} - \frac{\pi}{2}$.

3. В полученных равенствах замените $u$ на $t/3$, решите полученные уравнения.

**OKR_KR3**$(\sin(t/3), 3\pi/2)$ ↲S ↲,

Результат $\left[\frac{9\cos q}{10}, \frac{9\sin q}{10} - \frac{1}{10}\right]$.

Продолжите решения задачи.

Касательные, проведенные к кривой через точки соприкосновения, должны быть горизонтальными прямыми. Убедитесь в этом. Постройте кривую, окружность и касательные.

**Задача 9.** Построить лемнискату $r = \sqrt{\cos 2t}$ и окружности, соприкасающиеся с ней в точке, где ордината лемнискаты достигает наибольшего значения.

Решение.

1. Надо найти значения $t$, при которых функция **VR**$(r,t)$ (то есть функция $v(t)$) имеет максимальное значение.

**VR**$(\sqrt{\cos 2t})$ ↵ S ↵. Результат: $\sqrt{\cos 2t}\sin t$.

2. Предположим, было установлено M T Auto. Тогда

**DIF**$(\sqrt{\cos 2t}\sin t, t)$ ↵ S ↵.

Результат: $\cos t\sqrt{\cos 2t} - \dfrac{\sin t \sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}}$.

3. Установим M T Collect, умножим полученное выражение на $\sqrt{\cos 2t}$, *для этого сначала скопируем его при помощи* клавиши **F4**.

4. Выполним S ↵. Результат: $\cos 3t$.

5. L ↵. Результат: $t = \dfrac{\pi}{6}$.

6. **OKR_KR3**$(\sqrt{\cos 2t}, \pi/6)$ ↵ S ↵

7. Очевидно, искомый радиус лежит на вертикальной прямой, поэтому воспользуемся функциями **RADY_OKR3** и **PRED_RADY_OKR3**. Результаты: $\left[\dfrac{\sqrt{6}}{4}, y\right]$, $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{12}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right]$.

Сделайте рисунок. Продолжите решение задачи самостоятельно.

**Задача 10.** Построить розу $r = \sin 4t$ и окружности, соприкасающиеся с концами лепестков розы, лежащими: а) в первой четверти; б) в третьей четверти.

Ответ: а) при $t = \pi/8$ $\left[0.059\cos q + 0.360, 0.059\sin q + 0.870\right]$,

при $t = 11\pi/8$ $\left[0.059\cos q + 0.869, 0.059\sin q + 0.353\right]$.

б) при $t = 3\pi/8$ и при $t = 9\pi/8$.

# ЭВОЛЮТА КРИВОЙ

Геометрическое место центров кривизны линии называется ***эволютой*** этой линии.

## Эволюта кривой, заданной параметрически

Для нахождения эволюты кривой, заданной параметрически, введем функцию

$$\boxed{\mathbf{KOOR\_KR}2(u,v,s,t):=\left[\mathbf{XC\_KR}2(u,v,s,t),\mathbf{YC\_KR}2(u,v,s,t)\right]}$$

Используя эту функцию, можно найти координаты центра соприкасающейся окружности к кривой $\left[u(t),v(t)\right]$ в точке $t = s$, а также эволюту этой кривой.

### ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Построить циклоиду $[t-\sin t,\ 1-\cos t]$ и ее эволюту.

Решение.

**KOOR_KR2**$(t-\sin t,\ 1-\cos t)$ ↲ S ↲. Результат: $[s+\sin s,\ \cos s-1]$.

Это также циклоида.

На рис. 74 проведено также несколько радиусов соприкасающихся окружностей.

**Задача 2.** Построить кардиоиду $[2\cos t-\cos 2t,\ 2\sin t-\sin 2t]$ и ее эволюту.

Решение.

**KOOR_KR2**$(2\cos t-\cos 2t,\ 2\sin t-\sin 2t)$ ↲ S ↲.

Результат: $\left[\dfrac{2\cos s+\cos 2s}{3},\dfrac{2\sin s+\sin 2s}{3}\right]$.

Это также кардиоида, подобная данной, повернутая на 180°.

**Задача 3.** Построить астроиду $\left[a\cos^3 t, a\sin^3 t\right]$ и ее эволюту.

Ответ: $\left[a\cos^3 s+3a\sin^2 s\cos s,\ 3a\sin s\cos^2 s+a\sin^3 s\right]$ (рис. 75).

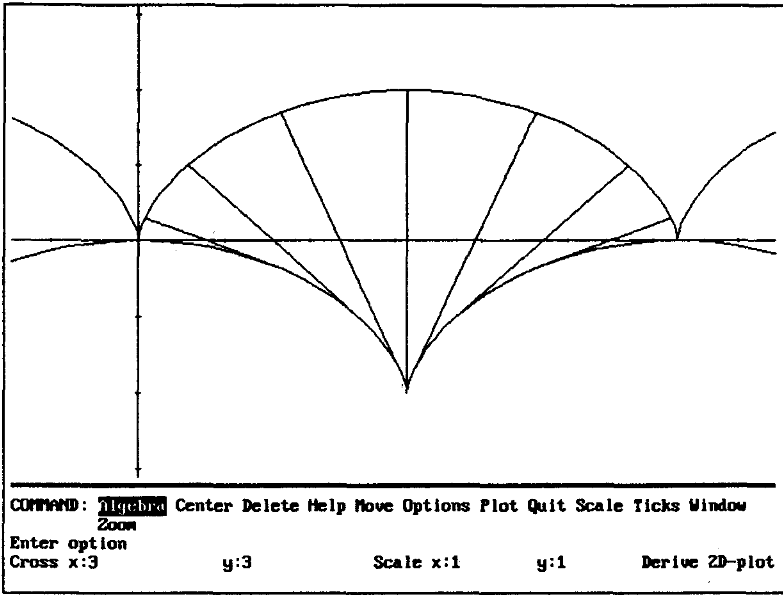

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
Zoom
Enter option
Cross x:3
y:3
Scale x:1
y:1
Derive 2D-plot

**Рис. 74**

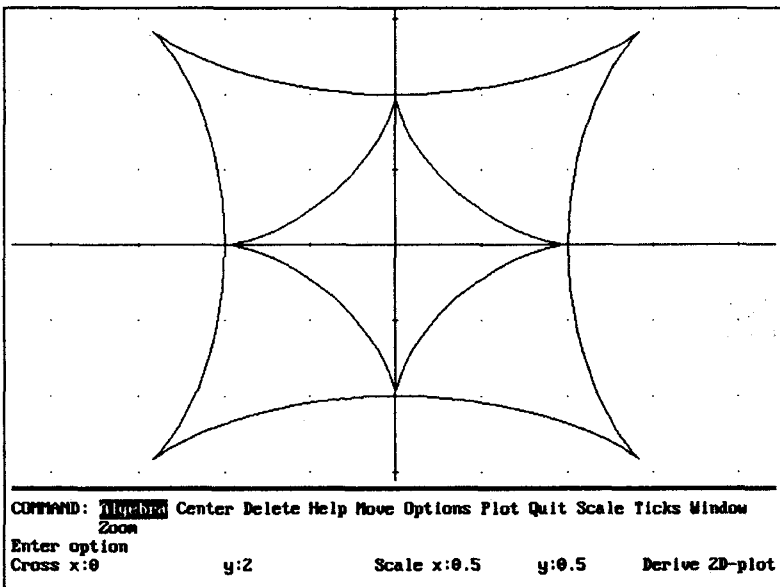

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
Zoom
Enter option
Cross x:0
y:2
Scale x:0.5
y:0.5
Derive 2D-plot

**Рис. 75**

Это астроида, подобная данной, повернутая относительно данной на угол 90°. На рис. 75 изображены эти кривые.

**Задача 4.** Построить эллипс $\left[2\cos t, 3\sin t\right]$, его эволюту и несколько радиусов соприкасающихся окружностей.

**Задача 5.** Доказать, что кривая $[a(\cos t + t\sin t), a(\sin t - t\cos t)]$ является эвольвентой окружности $[a\cos t, a\sin t]$, то есть, что окружность является эволютой этого круга.

В задачах 6—8 построить кривую и ее эволюту.

**Задача 6.** $\left[2t, t^2 - 2\right]$.

**Задача 7.** $[n\cos t - \cos nt, n\sin t - \sin nt]$ при $n = 3, n = 4, n = 5, n = 6$ (эпициклоиды).

**Задача 8.** $[n\cos t + \cos nt, n\sin t - \sin nt]$ при $n = 2, n = 4$ (гипоциклоиды) (рис. 76 и 77).

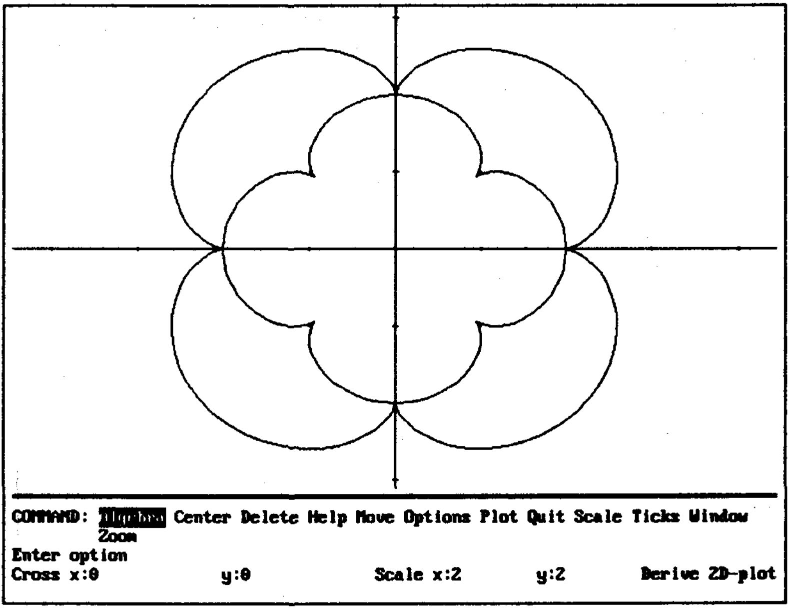



**Рис. 76**

**Задача 9.** Построить гипоциклоиду $[n\cos t + \cos nt, n\sin t - \sin nt]$ при $n = 6$, ее эволюту и подэру на одних осях.

На рис. 78 внешняя кривая — эволюта гипоциклоиды, внутренняя — ее подэра.

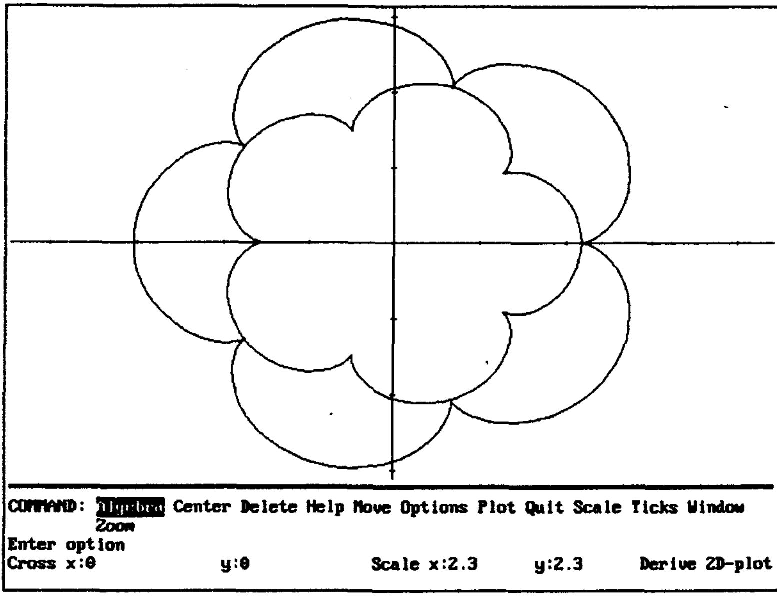

COMMAND: Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
Zoom
Enter option
Cross x:0
y:0
Scale x:2.3
y:2.3
Derive 2D-plot

**Рис. 77**

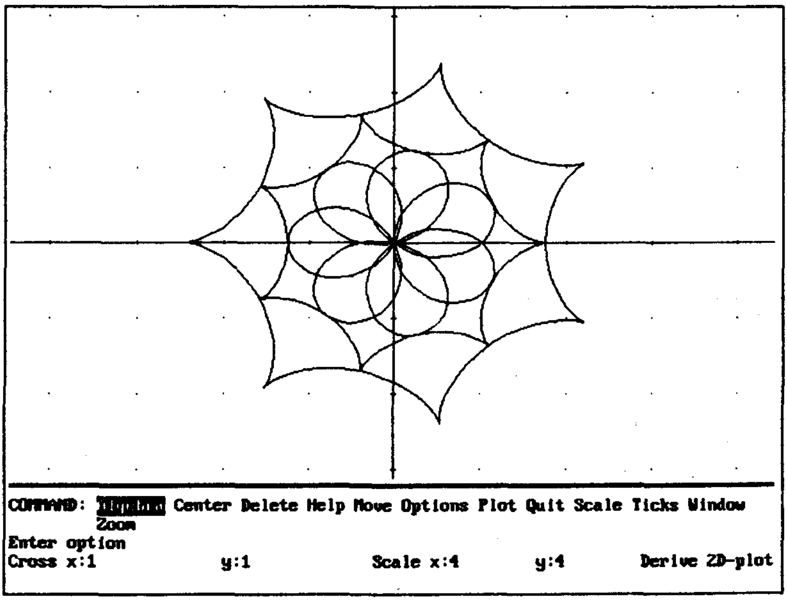

COMMAND: Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
Zoom
Enter option
Cross x:1
y:1
Scale x:4
y:4
Derive 2D-plot

**Рис. 78**

## Эволюта кривой, заданной в полярных координатах

Введем функцию

$$\mathbf{KOOR\_KR3}(r,s,t) := [\mathbf{XC\_KR3}(r,s,t), \mathbf{YC\_KR3}(r,s,t)]$$

Если функции **XC_KR3** и **YC_KR3** не введены, можно воспользоваться формулами перехода от полярных координат к параметрическому заданию кривой и функцией **KOOR_KR2**.

$$\mathbf{KOOR\_KR32}(r,s,t) := \mathbf{KOOR\_KR2}(r\cos t, r\sin t, s, t)$$

Или

$$\mathbf{KOOR\_KR32}(r,s,t) := \mathbf{KOOR\_KR2}(\mathbf{UR}(r,t), \mathbf{VR}(r,t), s, t)$$

Используя эти функции, можно найти координаты центра соприкасающейся окружности к кривой $r = \varphi(t)$ в точке $t = s$, а также эволюту этой кривой.

### ЗАДАЧИ

Построить кривую и ее эволюту.

**Задача 1.** $r = \sin\dfrac{5t}{3}$.

Решение.

$\mathbf{KOOR\_KR3}\left(\sin\dfrac{5t}{3}\right)$ ↵ S ↵ или $\mathbf{KOOR\_KR32}\left(\sin\dfrac{5t}{3}\right)$ ↵ S ↵.

Результаты одинаковы, в первом случае Derive тратит несколько меньше времени, чем во втором.

Постройте обе кривые. Не забудьте перейти в режим построения кривых, заданных в полярных координатах, при построении данной кривой (рис. 79).

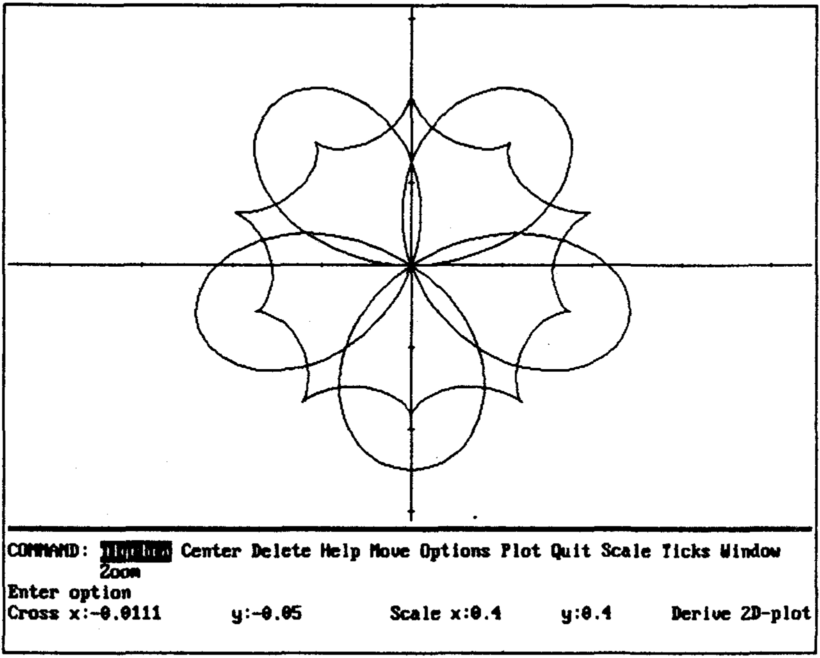



**Рис. 79**

**Задача 2.** $r = \sin 4t$.

**Задача 3.** $r = 1 + \cos t$.

**Задача 4.** $r = \cos 3t$.

**Задача 5.** $r = \sin \dfrac{t}{3}$.

**Задача 6.** $r = \sin 2t$.

**Задача 7.** $r = \sin \dfrac{t}{2}$.

**Задача 8.** $r = 2\cos t - 1$.

# ОГИБАЮЩАЯ СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ

## Нахождение огибающей семейства линий элементарным методом

Огибающей семейства линий на плоскости называется линия, которая в каждой своей точке касается одной линии семейства.

Пусть уравнение $F(x,y,s)=0$ задает семейство линий, где $s$ — параметр. Если уравнение квадратное относительно параметра $s$, то для нахождения огибающей данного семейства надо найти дискриминант уравнения и приравнять его к нулю. Полученное уравнение и есть уравнение огибающей данного семейства. Обоснование этого можно найти в статье Болтянского В. Г. «Огибающая» // «Квант» — 1987. — № 3. — С. 2—7.

### ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Найти огибающую семейства прямых $bx(s^2-1)+2say+ab(s^2+1)=0$, где $a$, $b$ — заданные положительные числа, $s$ — параметр.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $s^2(bx+ab)+2ays+ab-bx=0$. Это уравнение является квадратным относительно параметра $s$.

1. Введем уравнение **DISCR**$(bx+ab, 2ay, ab-bx)=0$.

2. Упростим его: ↵ S ↵.

Результат: $4(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)=0$.

3. Разделим полученное уравнение на $4a^2b^2$.

F4/ $(4a^2b^2)$ ↵ S ↵ E ↵. Результат: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$.

Это уравнение эллипса.

Построение рисунка.

1. Положим, например, $a=3$, $b=2$. Построим эллипс $[3\cos t, 2\sin t]$.

2. Решим данное в условии задачи уравнение относительно $y$.

3. Придайте параметру $s$ различные значения, например, 1/2, ±1, ±2, ±3, и постройте соответствующие этим значениям прямые.

Измените значения $a$ и сделайте соответствующий рисунок (рис. 80, с. 313).

**Задача 2.** Дано семейство окружностей $(x-s)^2+y^2=b^2\left(1-\dfrac{s^2}{c^2}\right)$, где $b, c$ — данные положительные числа, $s$ — параметр, $|s|\le c$. Доказать, что огибающей этого семейства является эллипс $\dfrac{x^2}{b^2+c^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Решение.

1. Перепишем уравнение семейства в виде

$$s^2\left(1+\frac{b^2}{c^2}\right)-2xs+x^2+y^2-b^2=0.$$

2. Составим уравнение

**DISCR**$\left(1+\dfrac{b^2}{c^2},-2x,x^2+y^2-b^2\right)=0$ и упростим его (↵S ↵).

3. Умножим результат на $(-c^2/(b^2(b^2+c^2)4))$. S ↵ E ↵.

Получим $\dfrac{x^2}{b^2+c^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$.

Следовательно, $\dfrac{x^2}{b^2+c^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Сделайте рисунок.

**Задача 3.** Семейство линий состоит из всех прямых, отсекающих от первого координатного угла треугольник данной площади $S$. Найти огибающую этого семейства. Сделать рисунок.

Ответ: $y=\dfrac{S}{2x}$.

**Задача 4.** Найти огибающую семейства кривых: а) $y=2sx-s^2$, б) $y=s^2-2sx$, в) $x^2+(y-s)^2=s$. Сделать соответствующие рисунки.

**Задача 5**. Найти огибающую семейства кривых: а) $y - sx + \frac{a}{2\sqrt{2}}(s^2 - 1) = 0$, б) $bx(1 + s^2) + ay(1 - s^2) - 2sab = 0$, где $a$ и $b$ — заданные положительные числа, $s$ — параметр.

Ответы: а) $y = \frac{\sqrt{2}(2x^2 + a^2)}{4a}$; б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

## Нахождение огибающей семейства кривых (второй метод)

Пусть уравнение $F(x, y, c) = 0$ задает семейство линий, где $c$ — параметр. Огибающую семейства можно найти следующим образом:

1. Из системы уравнений $\begin{cases} F(x,y,c) = 0 \\ F_c'(x,y,c) = 0 \end{cases}$ исключить параметр $c$.

2. Если на полученной линии $F_x' = 0$ и $F_y' = 0$, то эта линия — геометрическое место особых точек линий семейства. Если на линии хотя бы одно из этих равенств не выполняется, то найденная линия является огибающей данного семейства линий.

### ЗАДАЧИ

В задачах 1—10 найти огибающую данного семейства кривых.

**Задача 1.** $3(y - c)^2 - 2(x - c)^3 = 0$. (*)

Решение.

$F(x,y,c) = 3(y - c)^2 - 2(x - c)^3$.

1. Найдем $F_c'$, из равенства $F_c' = 0$ выразим $y$.

**DIF**$(3(y - c)^2 - 2(x - c)^3, c)$ ↲ S ↲ L ↲ y ↲.

Результат: $y = x^2 - 2cx + c^2 + c$. (**)

2. В (*) вместо $y$ подставим найденное выражение ( M S), разложим полученное выражение на множители (F R) и выразим $c$ (L ↲). Результат: $c = x$ и $c = \frac{3x - 2}{3}$.

3. Заменим в (**) $c$ на $x$: M S ↲ $c{:}= x$ ↲ S ↲. Результат: $y = x$.

4. Заменим в (**) $c$ на $\frac{3x - 2}{3}$, S ↲ E ↲.

Результат: $y = x - \frac{2}{9}$.

5. Построим рисунок. Положим в равенстве (*) $y - c = t^3$, тогда $y = c + t^3$, $x = c + \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\, t^2$. Следовательно, семейство линий можно задать параметрически: $\left[x = c + \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\, t^2, y = c + t^3\right]$.

Постройте прямые $y = x$ и $y = x - \frac{2}{9}$, а также несколько кривых семейства, например, при $c$ из отрезка $[-0{,}5; 0{,}5]$ с шагом 0,1 при $t \in [-1,1]$, Scale 0.2 (рис. 80).

По рисунку видим, что прямая $y = x$ — геометрическое место особых точек (докажите это), а прямая $y = x - \frac{2}{9}$ является огибающей семейства кривых.

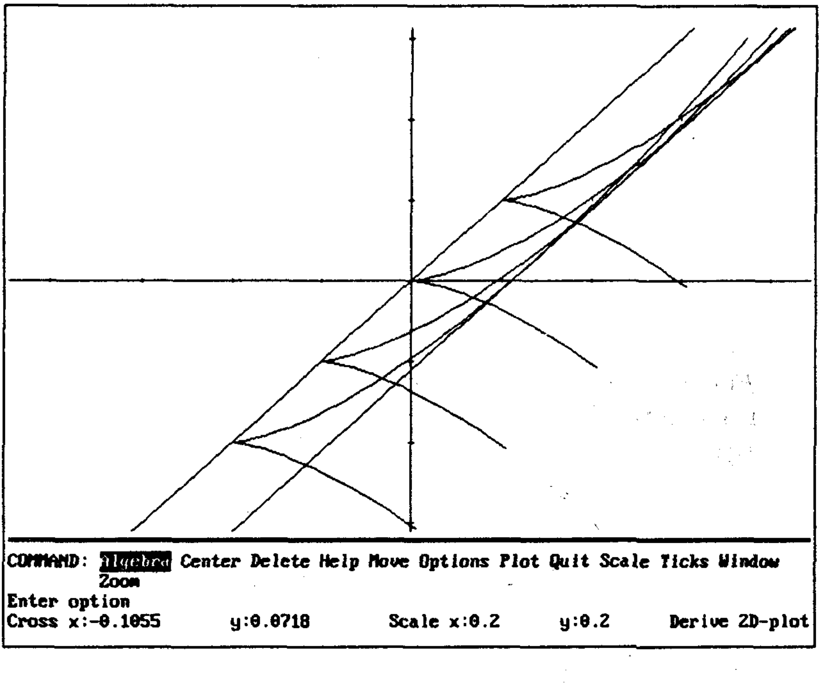



**Рис. 80**

**Задача 2.** $(1-c^2)x+2cy-a=0$.

Ответ: окружность $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}$ является огибающей данного семейства прямых.

Постройте рисунок, например, при $a=2$ (рис. 81).

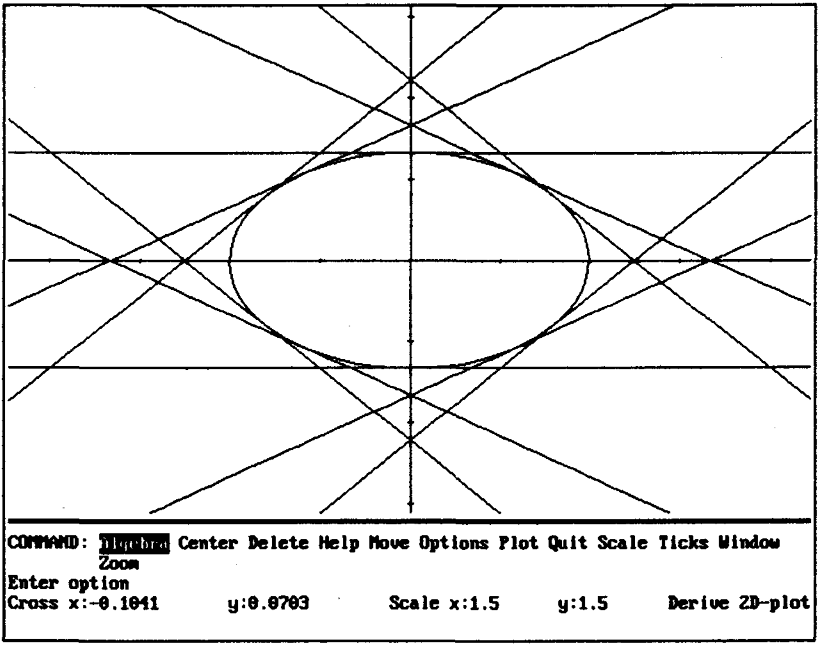



**Рис. 81**

**Задача 3.** $y^2-(x-c)^3=0$.

Ответ: прямая $y=0$ является одновременно и геометрическим местом особых точек, и огибающей. Сделайте рисунок. Параметрическое задание семейства кривых $[t^2+c, t^3]$.

**Задача 4.** $(x-c)^2+y^2=a^2$.

**Задача 5.** $y=(x-c)^3$.

**Задача 6.** $(y-c)^2-2(x-c^2)=0$. (*)

Р е ш е н и е.

1. **DIF**$((y-c)^2-2(x-c^2),c)$ ↵ S ↵ L ↵ $y$ ↵. Результат: $y=3c$.

2. В (*) M S ↵ $y$: $=3c$ ↵ S ↵ L ↵ $x$ ↵. Результат: $x=3c^2$.

Следовательно, получили параметрическое задание линии $[3c^2, 3c]$. Это парабола.

3. Построим рисунок. В (*) выделите курсором (в поле алгебры) $y - c$ и сделайте замену на $t$, выразите $x$. Результат: $x = \dfrac{2c^2 + t^2}{2}$. Получили параметрическое задание семейства (*): $\left[\dfrac{2c^2+t^2}{2}, c+t\right]$.

Сделайте рисунок, по нему убедитесь, что найденная парабола является огибающей заданного семейства.

**Задача 7.** $c^2(x - a) - cy - a = 0$.

Ответ: огибающей является парабола $y^2 + 4a(x - a) = 0$ или $\left[a - \dfrac{y^2}{4a}, y\right]$.

**Задача 8.** $(x + c)^2 - (y + c)^3 = 0$.

Ответ: прямая $y = x$ — геометрическое место особых точек, прямая $y = x + \dfrac{4}{27}$ — огибающая данного семейства.

**Задача 9.** $(x - c)^3 = (y + c^2)^2$.

**Задача 10.** $(x + c^2)^3 - (y - c)^2 = 0$.

Известно, что:

1) всякая кривая служит огибающей для семейства своих касательных;

2) всякая кривая служит огибающей для семейства своих кругов кривизны (соприкасающихся окружностей).

## ЗАДАЧИ

Найти семейства линий, для которых данная прямая служит огибающей.

**Задача 1.** $y = x^2 - 4$.

Решение.

1. Найдем семейство касательных к данной параболе.

**KAS1**$(x^2 - 4, c)$ ↵ S ↵. Результат: $y = 2cx - c^2 - 4$.

Постройте параболу и несколько касательных к ней, например, при $c = 0$, $c = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{2}$, $c = 1$, $c = -1$.

2. Найдем семейство соприкасающихся окружностей данной параболы.

**OKR_KR1** $(x^2-4,w)$ ↵ S ↵.

Постройте параболу и несколько окружностей, например, при $w=0$, $w=1$, ... Зрительно убедитесь в правильности вычислений.

**Задача 2.** $[3\cos t, 2\sin t]$.

Решение.

1. **KAS2**$(3\cos t, 2\sin t)$ ↵ S ↵.
2. **OKR_KR2**$(3\cos t, 2\sin t)$ ↵ S ↵.

Сделайте рисунки.

**Задача 3.** $r=\sin 2t$.

Решение.

Перейдите к параметрическому заданию кривой при помощи функции **PER_POLPAR**. Далее продолжите решение задачи самостоятельно. Сделайте рисунки.

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

Для вычисления неопределенных, определенных, несобственных интегралов служит встроенная функция **INT**. Первообразные функций разных порядков можно вычислять при помощи функции **DIF**.

## Вычисление неопределенных интегралов

Пусть требуется вычислить $\int u(x)\,\mathrm{d}x$. Тогда надо ввести **INT**$(u,x)$ и упростить, то есть выполнить S ↵.

**INT**$(u,x)$ ↵ S ↵.

В результате получим первообразную для данной функции $u(x)$.

**Примеры**

**Пример 1.** Вычислить $\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x$.

Решение.

**INT**$(x^2\sin x, x)$ ↵ S ↵. Результат: $(2-x^2)\cos x+2x\sin x$.

Проверка.

**DIF**$((2-x^2)\cos x+2x\sin x,x)$ ↵S ↵. Результат: $x^2\sin x$, что и требовалось показать.

Ответ: $I=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$.

**Пример 2.** Вычислить $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{4-x^2}}$.

Решение.

Установите M Branch Principal.

**INT**$(1/(x^4\sqrt{(4-x^2)}),x)$ ↵S ↵. Результат: $-\frac{(x^2+2)\sqrt{4-x^2}}{24x^2}$.

Результат: $\left[-\frac{1}{24x}-\frac{1}{12x^3}\right]\sqrt{(2-x)(x+2)}$.

Если вы работаете в версии 1.57, результат можно преобразовать к этому виду.

**Пример 3.** $\int\frac{x^2\,dx}{x^3-2x^2-5x+6}$.

**Пример 4.** $\int\frac{x^3-1}{x^3-x^2-10x-8}dx$.

**Пример 5.** $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{4-x^2}}$.

**Пример 6.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+5}}$.

**Пример 7.** $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3x+5}}$.

**Пример 8.** $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}}$.

**Пример 9.** $\int x^3\sin 2x\,dx$.

**Пример 10.** $\int e^x\sin^3 x\,dx$.

**Пример 11.** $\int\sin ax\cos bx\,dx$.

**Пример 12.** $\int \cos^n x\,\mathrm{d}x$ при $n = \overline{2,5}$.

**Пример 13.** $\int \sin^n x\,\mathrm{d}x$ при $n = \overline{2,5}$.

**Пример 14.** $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\mathrm{d}x$.

В некоторых случаях удается вычислить интеграл, используя подстановки, применяемые при «ручных» вычислениях.

**Пример 15.** $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$.

Решение.

Попытайтесь вычислить этот интеграл. После S ↲ Derive представит его в виде суммы двух интегралов. При «ручных» вычислениях этот интеграл вычисляют при помощи подстановки $x - 1 = t$. Поэтому сделаем замену $x = t + 1$.

1. M S ↲ $x := t + 1$

Мы видим, что после знака дифференциала стоит $t + 1$.

2. Скопируйте полученное выражение, используя клавишу **F3**, в строку ввода, уберите +1 ↲.

3. S ↲.

4. В полученном выражении замените $t$ на $x$–1 (M S).

5. Проверьте полученный результат, для этого найдите производную найденной функции.

Ответ: $I = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\sqrt{2-(x-1)^2}}{x-1} - \frac{\sqrt{2-(x-1)^2}}{2(x-1)} + C.$

**Пример 16.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$.

Решение.

Этот интеграл вычисляется при помощи подстановки $t = \frac{x-3}{x-1} \Rightarrow x = \frac{t-3}{t-1}$.

1. Сделайте подстановку.

2. Найдите производную дроби $\frac{t-3}{t-1}$. Результат: $\frac{2}{(t-1)^2}$.

3. Введите **INT**, выделите в интеграле, полученном после подстановки, выражение между знаком интеграла и знаком дифференциала, скопируйте его, скопируйте $\frac{2}{(t-1)^2}$, вве-

дите запятую, t, ). Тем самым $d\left(\frac{x-3}{x-1}\right)$ вы замените на $\frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t$.

4. Вычислите полученный интеграл (S ↵).

Результат: $\mathrm{SIGN}(t-1)\left[\frac{\pi+2\sqrt{t}-2}{2}-2\,\mathrm{ATAN}\sqrt{t}\right]$.

(Функция **SIGN** — знак числа.)

5. Сделайте обратную замену, то есть замените $t$ на $\frac{x-3}{x-1}$, выделите в полученной строке в поле алгебры выражение в квадратных скобках, выполните E ↵.

Результат: $\mathrm{SIGN}(x-1)\left[2\,\mathrm{ATAN}\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}+1\right]$.

6. Для проверки результата найдите производную полученной функции. Если было установлено M (Manage) B (Branch) Principal, то результат: $\frac{\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}}{(x-2)(x-3)|x-1|}$. Если вместо Principal установлено Any, то результат: $\frac{1}{\sqrt{x-1}(x-2)\sqrt{x-3}|x-1|}$. Получите последний результат, то есть, если ответ в другой форме, то выполните M B Any S ↵. После этого задайте для переменной $x$ область значений $(1,+\infty)$, для этого выполните D V x ↵ Interval и укажите пределы, ↵.

Результат: $\frac{1}{(x-1)^{3/2}(x-2)\sqrt{x-3}}$, что и требовалось показать.

Вернитесь к ответу примера, выполните Simplify (S ↵), уберите из полученного выражения постоянные слагаемые.

Результат: $2\,\mathrm{ATAN}\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}}$.

Ответ: $I=2\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}}+C$.

**Применение функции DIF для вычисления первообразных функции.** Пусть надо вычислить первообразную функции $u(x)$ $k$-го порядка. Для этого надо выполнить

**DIF**$(u,x,-k)$ ↵ S ↵

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Вычислить $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

Р е ш е н и е.

Решим пример обоими способами.

*1-й способ.* **INT**$(1/(1+x^2),x)$ ↵ S ↵. Результат: **ATAN**$(x)$.

*2-й способ.* **DIF**$(1/(1+x^2),x,-1)$ ↵ S ↵. Результат: **ATAN**$(x)$.

**Задача 2.** Найти первообразную функции $1/(1+x^2)$ второго порядка.

Р е ш е н и е.

*1-й способ·*

Найдем искомую первообразную как $\int\left(\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$. Внутренний интеграл мы уже вычислили.

**INT**(**ATAN**$(x),x)$ ↵ S ↵.

*2-й способ.* **DIF**$(1/(1+x^2),x,-2)$ ↵ S ↵.

Сравните результаты.

**Задача 3.** Найти первообразную функции $\sin x\cos^2 3x$ третьего порядка двумя способами.

## Вычисление определенных интегралов

Пусть требуется вычислить $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$. Тогда надо ввести **INT**$(u,x,a,b)$ и упростить, то есть выполнить S ↵.

**INT**$(u,x,a,b)$ ↵ S ↵

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Вычислить $\int_0^{\pi} x^4 \sin\frac{x}{2} \mathrm{d}\,x$.

Решение.

**INT**$(x\text{^}4\sin(x/2), x, 0, \mathrm{pi})$ ↵ S ↵.

Результат: $16(\pi^3 - 24\pi + 48)$.

Если требуется знать приближенное значение интеграла, нажмите X ↵. Можно после ввода нажать X ↵, тогда вы сразу получите приближенное значение интеграла.

> ***Замечание.*** Число $\pi$, как вы знаете, можно ввести также, нажав **Alt+P**.

**Задача 2.** Вычислить $\int_1^{2} x^3 e^{2x} \mathrm{d}\,x$.

Решение.

**INT**$(x^3$**EXP**$(2x), x, 1, 2)$ ↵ S ↵. Результат: $\frac{17e^4}{8} - \frac{e^2}{8}$.

Вычислите приближенное значение интеграла.

> ***Замечение.*** $e^{2x}$ можно ввести также, нажав **Alt+E**^(2x).

**Задача 3.** $\int_1^{2} \frac{x\,\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x^2+1}}$.

**Задача 4.** $\int_0^{\pi} x^2 \cos 3x \,\mathrm{d}\,x$.

**Задача 5.** $\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2+1}$.

**Задача 6.** $\int_1^{2} \frac{x\,\mathrm{d}\,x}{\sqrt{2x-1}}$.

> ***Замечание.*** О вычислении приближенных значений интеграла говорится также в пунктах «Методы вычислений приближенных значений интегралов», «Степенные ряды. Ряд Тейлора».

## Вычисление несобственных интегралов

Несобственные интегралы вычисляются подобно тому, как вычисляются определенные интегралы.

***Если точки разрыва находятся внутри промежутка, по которому ведется интегрирование, представьте интеграл в виде суммы интегралов так, чтобы точки разрыва были концами промежутков, по которым ведется интегрирование.***

Чтобы понять необходимость этого, вычислите интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ обоими способами и сравните результаты.

### ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Вычислите $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^n}$ при $n = \overline{1,5}$.

Решение.

1. Пусть $n = 1$. **INT**$(1/x, x, 1, \mathrm{inf})$ ↵ S ↵. Результат: $+\infty$. Следовательно, данный интеграл расходится.

2. Пусть $n = 2$. **INT**$(1/x^2, x, 1, \mathrm{inf})$ ↵ S ↵. Результат: 1. Следовательно, интеграл сходится к 1.

Продолжите решение примера.

**Задача 2.** Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Решение.

**INT**$(1/(x^2+1), x, -\mathrm{inf}, \mathrm{inf})$ ↵ S ↵. Результат: $\frac{\pi}{2}$.

**Задача 3.** Вычислить $\int\limits_{a^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, $a > 0$.

*Указание.* Перед выполнением операции S ↵ определите $a$ как положительную переменную: нажмите

**D (Declare) V (Variable)** $a$ ↵ **D (Domain)** ↵ **P (Positive)**

*Замечание.* Если вы хотите установить курсор строки ввода на слово Positive, используйте клавишу **Backspace**.

Ответ: $-\mathrm{LN}\left(\frac{\sqrt{a^4+1}}{a^2}-\frac{1}{a^2}\right)$ или $2\ln a-\ln(\sqrt{a^4+1}-1)$.

**Задача 4.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

**Задача 5.** $\int\limits_0^{+\infty}x^3e^{-x}\,\mathrm{d}x$. Ответ: $\frac{1}{2}$.

**Задача 6.** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3(x+2)}$.

**Задача 7.** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$.

**Задача 8.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

**Задача 9.** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$.

**Задача 10.** $\int\limits_0^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$.

**Задача 11.** $\int\limits_1^{2}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$.

**Задача 12.** $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-1}}$.

**Задача 13.** $\int\limits_0^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^a}$ при $a=\frac{1}{3}$, $a=\frac{1}{2}$, $a=1$, $a=2$.

**Задача 14.** $\int\limits_0^{\frac{1}{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$ при $n=\overline{2,7}$. Отметьте полученную закономерность.

# ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

## Площадь плоской фигуры в декартовых координатах

Пусть на отрезке $[a; b]$ определена непрерывная и неотрицательная функция $y=f(x)$. Тогда площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a; b]$ оси абсцисс, вычисляется по формуле $S = \int_a^b f(x)dx$.

Пусть фигура ограничена сверху кривой $y = u(x)$, снизу кривой $y = v(x)$, по бокам прямыми $x = a$ и $x = b$, обе кривые непрерывны на отрезке $[a; b]$. Тогда площадь фигуры вычисляется по формуле $S = \int_a^b (u(x) - v(x))\,\mathrm{d}x$.

Введем функцию **S_DEC**, определяющую площадь фигуры, граница которой задана в декартовых координатах.

$$\boxed{\mathbf{S\_DEC}(u,a,b,x) := \int_a^b u\,\mathrm{d}x}$$

***Замечание.*** Можно было бы ввести функцию $\mathbf{S\_DEC}(u,a,b,x) := S = \int_a^b u\,\mathrm{d}x$, тогда при вычислении площади составной фигуры $S$ будут суммироваться, то есть вместо S=... ответ будет 2$S$=... при разбиении фигуры на две части. Этого можно избежать, используя функцию **LEF** (она есть начиная с версии 2.6).

### ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Решение.

Построим графики функций $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$. Очевидно, что кривые пересекаются в точке $(1;1)$. Сверху фигура ограничена кривой $y = \sqrt{x}$, снизу — кривой $y = x^2$, по бокам прямыми $x = 0$ и $x = 1$. Следовательно, $S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx$.

**S_DEC**$(\sqrt{x} - x^2, 0, 1)$ ↲ S ↲. Результат: $\frac{1}{3}$.

Ответ: $S = \frac{1}{3}$.

**Задача 2.** Найти площадь фигуры, заключенной между параболой $y = -x^2 + 4x - 3$ и касательными к ней в точках (0;–3) и (3;0).

Р е ш е н и е.

Обе данные точки принадлежат параболе.

1. Найдем уравнение касательной к параболе в точке (0; –3).
**KAS1**$(-x^2 + 4x - 3, 0)$ ↲ S ↲. Результат: $y = 4x - 3$.

2. Найдем уравнение касательной к параболе в точке (3; 0).
**KAS1**$(-x^2 + 4x - 3, 3)$ ↲ S ↲. Результат: $y = 6 - 2x$.

3. Найдем точку пересечения касательных.

$[y = 4x - 3, y = 6 - 2x]$ ↲ L ↲. Результат: $\left[x = \frac{3}{2}, y = 3\right]$.

4. Построим чертеж.

5. Разобьем фигуру на две фигуры прямой $x = \frac{3}{2}$.
Следовательно, искомая площадь равна:

$$S = \int_0^{3/2} (4x - 3 - (-x^2 + 4x - 3))\,dx + \int_{3/2}^{3} (6 - 2x - (-x^2 + 4x - 3))\,dx.$$

**S_DEC**$(4x - 3 - (-x^2 + 4x - 3), 0, 3/2)$ +

**S_DEC**$(6 - 2x - (-x^2 + 4x - 3), 3/2, 3)$ ↲ S ↲. Результат: $\frac{9}{4}$.

Ответ: $\frac{9}{4}$.

**Задача 3.** Окружность $x^2 + y^2 = 8$ разделена параболой $y = \frac{x^2}{2}$ на две части. Найти площади обеих частей.

Р е ш е н и е.

Построим рисунок. Найдем точки пересечения параболы и окружности. Обе построенные фигуры симметричны относительно оси ординат. Это можно учесть при вычислении площадей этих фигур.

Вычислим площадь фигуры, ограниченной сверху дугой окружности, а снизу — дугой параболы.

$$s_1 = 2\int_0^2 \left(\sqrt{8-x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx.$$

**2S_DEC**$\left(\sqrt{8-x^2} - \frac{x^2}{2}, 0, 2\right)$ ↲ S ↲ E ↲. Результат: $2\pi + \frac{4}{3}$.

Площадь второй фигуры найдем как разность площади круга и площади первой фигуры: $8\pi - \left(2\pi + \frac{4}{3}\right) = 6\pi - \frac{4}{3}$.

Ответ: $2\pi + \frac{4}{3}$ и $6\pi - \frac{4}{3}$.

**Задача 4.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, уравнения которых $y^2 = 2x + 1$ и $x - y - 1 = 0$.

Решение.

1. Найдем точки пересечения данных линий.

2. Построим рисунок. Построим прямую $y = x - 1$ и параболу $\left[\frac{y^2-1}{2}, y\right]$. Найдите точки пересечения параболы и прямой графически и проверьте правильность результатов.

3. Построенная фигура ограничена справа прямой $x = y + 1$, слева – параболой $x = \frac{y^2}{2}$, сверху – прямой $y = 3$, снизу прямой $y = -1$. Следовательно, площадь фигуры равна: $S = \int_{-1}^{3} \left(y + 1 - \frac{y^2-1}{2}\right) dy$.

**S_DEC**$(y + 1 - (y^2 - 1)/2, -1, 3, y)$ ↲ S ↲. Результат: $\frac{16}{3}$.

Ответ: $\frac{16}{3}$.

**Задача 5.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 2x$ и нормалью к ней, наклоненной к оси абсцисс под углом 135°.

Решение.

1. Найдем угол между касательной к параболе в точке, в которой пересекаются парабола и нормаль к ней, наклоненная к оси абсцисс под углом 135°. Этот угол равен

$180° - 135° = 45°$. Этот угол можно вычислить еще так: $135° - 90° = 45°$.

2. $\mathrm{tg}45° = 1$. Следовательно, нам надо найти точку касания параболы и касательной к ней с угловым коэффициентом, равным 1.

3. Приравняем угловой коэффициент касательной к 1.

**K1**$\left(\frac{y^2}{2}, t, y\right) = 1$ ↵ S ↵. Результат: $t = 1$.

4. Найдем уравнение нормали при $x_0 = t = 1$.

**NOR1**$\left(\frac{y^2}{2}, 1, y\right)$ ↵ S ↵. Результат: $x = \frac{3}{2} - y$.

5. Построим рисунок. Обе линии зададим параметрически. $\left[\frac{y^2}{2}, y\right]$ – параметрическое задание параболы, $\left[\frac{3}{2} - y, y\right]$ – нормаль к ней.

6. Найдем точки пересечения параболы и нормали. Это можно сделать графически (с проверкой правильности результата). Найдем координаты точек аналитически. В уравнении $x = \frac{y^2}{2}$ заменим $x$ на $\frac{3}{2} - y$ и решим полученное уравнение:

M S $x := \frac{3}{2} - y$ ↵ $y$ ↵ L ↵. Результат: $y = -3$ и $y = 1$.

7. Построенная фигура ограничена справа прямой $x = \frac{3}{2} - y$, слева параболой $x = \frac{y^2}{2}$, поэтому искомая площадь $S = \int\limits_{-3}^{1} \left(\frac{3}{2} - y - \frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}y$.

**S_DEC**$\left(\frac{3}{2} - y - \frac{y^2}{2}, -3, 1, y\right)$ ↵ S ↵. Результат: $\frac{16}{3}$.

> ***Замечание.*** Так как площадь есть число, можно было поменять ролями переменные $x$ и $y$, тогда, как вы знаете, несколько упростилось бы обращение к функциям Derive.

**Задача 6.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$.

В задачах 7–10 вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными кривыми.

**Задача 7.** $y = 1/\sqrt{2-5x}$, $x \in [0;0.4)$. Ответ: $2\sqrt{2}/5$.

**Задача 8.** $y = \dfrac{1}{x\ln x}$, $x \in (1;e]$.

**Задача 9.** $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$, $x \in (3;5)$.

**Задача 10.** $y = x\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $x \in [0;1)$.

*Замечание*. Вы, конечно, обратили внимание на то, что в задачах 7–10 ищем площади неограниченных областей. Например, функция из примера 7 не определена при $x = 0.4$. Постройте графики данных функций на указанных промежутках.

## Вычисление площади фигуры, граница которой задана параметрически

**Задача 1.** Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$ и осью абсцисс.

Решение.

Построим циклоиду при $t \in [0;2\pi]$. Получили фигуру, ограниченную сверху циклоидой, снизу – отрезком $[0;2\pi]$ оси абсцисс. Рассуждая аналогично тому, как при определении площади фигуры, граница которой задана в декартовых координатах, приходим к выводу, что искомую площадь можно найти по формуле $S = \int\limits_0^{2\pi} y(t)\, x'(t)\, \mathrm{d}t$.

INT((1 – cos $t$) DIF($t$ – sin $t$, $t$), $t$, 0, $2\pi$) ↵ S ↵. Результат: $3\pi$.

Ответ: $S = 3\pi$.

Пусть граница фигуры задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, фигура ограничена замкнутой кривой, причем при изменении $t$ в пределах от $\alpha$ до $\beta$ граница контура обходится полностью, начальная точка обхода $(x(\alpha), y(\alpha))$ и конечная точка $(x(\beta), y(\beta))$ совпадают.

***Положительным*** называется направление обхода контура, при котором фигура остаётся слева.

Пусть $\alpha$ и $\beta$ значения параметра $t$, соответствующие началу и концу обхода контура в положительном направлении. Тогда площадь фигуры можно вычислить по любой из трех формул:

$$S = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t, \qquad S = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(x(t)y'(t) - x'(t)y(t))\,\mathrm{d}t.$$

Введем функции, определяющие площадь фигуры по этим формулам.

$$\boxed{\mathbf{S\_PAR1}(u,v,a,b,t) := -\int_{a}^{b} v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\mathbf{S\_PAR2}(u,v,a,b,t) := \int_{a}^{b} u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\mathbf{S\_PAR3}(u,v,a,b,t) := \frac{1}{2}\int_{a}^{b}\left(u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t}$$

**Задача 2.** Найти площадь фигуры, ограниченной петлей $\left[t^2, t(3-t^2)/3\right]$.

Р е ш е н и е.

Построим графики функций $x(t)$ и $y(t)$ и заданную кривую (кривая на рис. 82).

При изменении параметра $t$ от $+\sqrt{3}$ до $-\sqrt{3}$ граница петли обходится полностью, при этом фигура остается слева. Постройте петлю при найденных значениях параметра и вни-

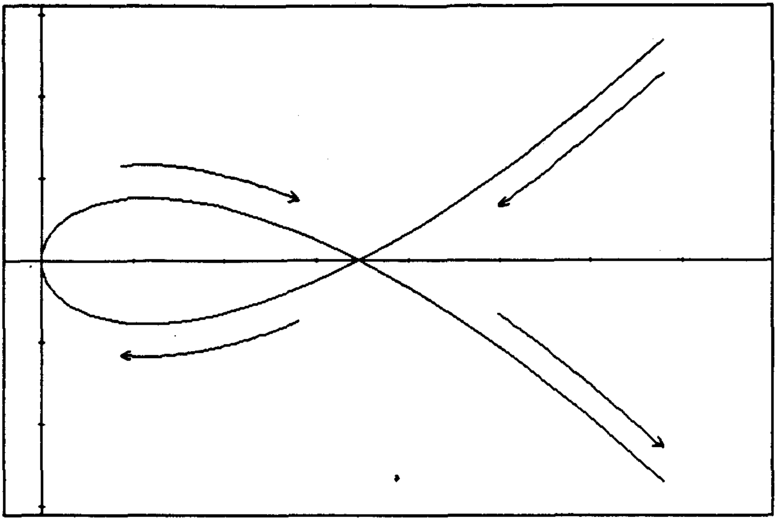


**Рис. 82**

мательно следите за ходом ее построения, убедитесь в правильности сделанных выводов. Следовательно,

$$S = \int\limits_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} y(t)\, x'(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

**S_PAR1**$(t^2, t(3-t^2)/3, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$ ↵ S ↵. Результат: $\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$.

Теперь воспользуйтесь функциями **S_PAR2** и **S_PAR3** и сравните полученные результаты.

Ответ: $S = \dfrac{8\sqrt{3}}{5}$.

**Задача 3.** Найти площадь фигуры, ограниченной петлей

$$\left[\frac{t(6-t)}{3}, \frac{t^2(6-t)}{8}\right]$$

Решение.

Построим кривую (рис. 83). Петля описывается при изменении параметра $t$ от 0 до 6, при этом описываемая фигура остается слева.

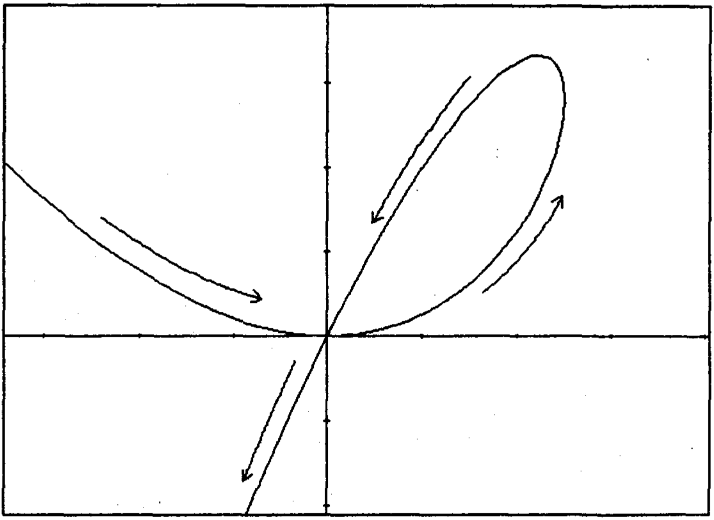


**Рис. 83**

Поэтому площадь фигуры надо искать по формуле $S = -\int\limits_0^6 y(t)\, x'(t)\,\mathrm{d}t$. Найдите площадь фигуры всеми тремя способами.

Ответ: $S = \dfrac{27}{5}$.

**Задача 4.** Найти площадь фигуры, ограниченной петлей $\left[at(t^2-3)/2, b(t^2-2)/2\right]$, $a > 0$, $b > 0$.

Решение.

Построим кривую, например, при $a = 2$, $b = 3$ (рис. 84).

Исследование показывает, что $S = -\int\limits_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} y(t)\, x'(t)\,\mathrm{d}t$.

Ответ: $S = \dfrac{6\sqrt{3}}{5}ab$.

**Задача 5.** Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $x(t) = a\cos t(1+\cos t)$, $y(t) = a\sin t(1+\cos t)$.

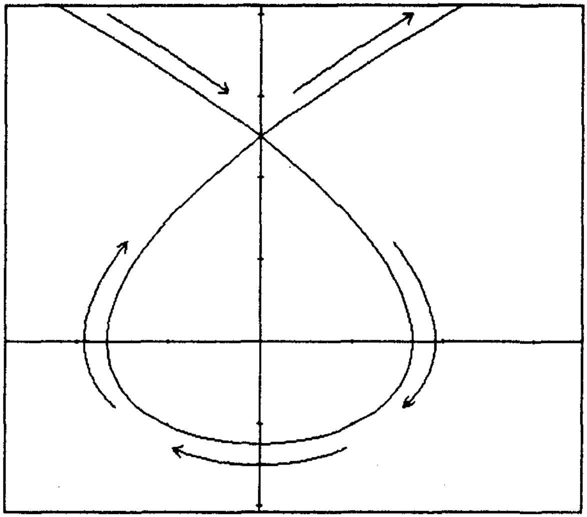


**Рис. 84**

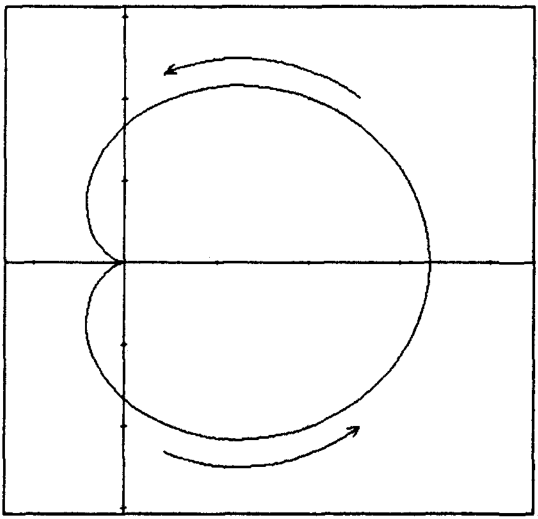


**Рис. 85**

Р е ш е н и е.

Построим кривую при $a = 1$ (рис. 85). Мы видим, что при изменении параметра в пределах от 0 до $2\pi$ граница фигуры вычерчивается полностью, при этом фигура остается слева. Поэтому

$$S = -\int_0^{2\pi} y(t)\, x'(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Найдите площадь фигуры всеми тремя способами.

Ответ: $S = \dfrac{3}{2} a^2 \pi$.

**Задача 6.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\left[at(1-t^2), at^2(1-t^2)\right]$

Р е ш е н и е.

Постройте кривую при каком-либо значении $a$ (рис. 86).

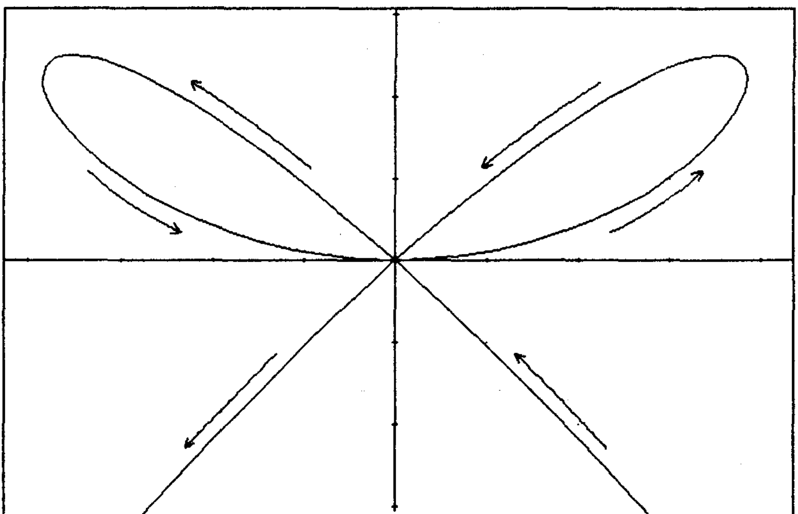


**Рис. 86**

Мы видим, что фигура ограничена двумя петлями, симметричными относительно оси ординат, поэтому можно найти площадь, ограниченную одной из петель, и умножить результат на 2. При изменении параметра $t$ от $-1$ до 1 полностью вычерчиваются обе петли, при изменении параметра от 0 до 1 вычерчивается только правая петля. Следовательно, искомую площадь можно находить любым из способов, например, по формуле $S = -\int\limits_{-1}^{1} y(t)x'(t)\mathrm{d}t$ или по формуле $S = -2\int\limits_{0}^{1} y(t)x'(t)\mathrm{d}t$. Закончите решение задачи самостоятельно.

Ответ: $S = \dfrac{8a^2}{105}$.

**Задача 7.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $x(t) = a\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$, $y(t) = \dfrac{2at}{(1+t^2)}$.

Решение.

Построим кривую. Мы видим, что фигура обходится в положительном направлении при изменении параметра от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, площадь фигуры определяется по формуле $S = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, x'(t)\mathrm{d}t$ (то есть надо вычислить несобственный интеграл). Закончите решение задачи самостоятельно.

Ответ: $S = \dfrac{3\pi\alpha^2}{8}$.

**Задача 8.** Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$.

Ответ: $S = \dfrac{3\pi}{8}$.

**Задача 9.** Найти площадь эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Ответ: $S = ab\pi$.

**Задача 10.** Найти площадь фигуры, ограниченной петлей $x(t) = 2t - t^2$, $y(t) = 2t^2 - t^3$.

Ответ: $S = \dfrac{8}{15}$.

**Задача 11.** Найти площадь фигуры, ограниченной петлей $x(t) = t^2 - 1,\ y(t) = t^3 - t$.

Ответ: $S = \dfrac{8}{15}$.

**Задача 12.** Найти площадь фигуры, ограниченной петлей $x(t) = \dfrac{t(1-t^2)}{1+3t^2},\ y(t) = \dfrac{4t^2}{1+3t^2}$.

Ответ: $S = \dfrac{1}{3}$.

**Задача 13.** Найти площадь фигуры, ограниченной петлей $x(t) = \dfrac{1}{1+t^2}, y(t) = \dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2}$.

Ответ: $S = 1 - \dfrac{\pi}{4}$.

**Задача 14.** Найти площадь фигуры, ограниченной петлей $x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ y(t) = t\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Ответ: $s = 2 - \dfrac{\pi}{2}$.

**Задача 15.** Найти площадь фигуры, ограниченной эпициклоидой $x(t) = r(n\cos t - \cos nt),\ y(t) = r(n\sin t - \sin nt)$, $n \in \mathrm{N}$.

Ответ: $S = r^2 n(n+1)$.

**Задача 16.** Найти площадь фигуры, ограниченной гипоциклоидой $x(t) = r(n\cos t + \cos nt),\ y(t) = r(n\sin t - \sin nt)$, $n - 1 \in \mathrm{N}$.

Ответ: $S = \pi r^2 n\,(n-1)$.

**Задача 17.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $x(t) = a\sin t\cos^2 t,\ y(t) = a\cos t\sin^2 t,\ a>0,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: $S = \dfrac{\pi a^2}{32}$.

## Площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярных координатах

Пусть сектор ограничен дугой кривой $r = r(t)$ и лучами $t_1 = \alpha$, $t_2 = \beta$, функция $r = r(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$. Тогда площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Введем функцию

$$\boxed{\mathbf{S\_POL}(r,a,b,t) := \frac{1}{2}\int_a^b r^2\,\mathrm{d}t}$$

### ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Найти площадь, ограниченную кардиоидой $r = a\,(1 + \cos t)$.

Р е ш е н и е.

Постройте кривую. При построении кривой аргумент $t$ меняется от 0 до $2\pi$. Поэтому искомая площадь равна:

$\mathbf{S\_POL}(a(1+\cos t),0,2\,\mathrm{pi})$ ↲ S ↲. Результат: $\dfrac{3\pi a^2}{2}$.

> ***Замечание.*** При решении задачи можно было использовать симметрию кривой и найти площадь как

$\mathbf{2S\_POL}(a(1+\cos t),0,\mathrm{pi})$ ↲ S ↲

Ответ: $S = \dfrac{3\pi a^2}{2}$.

**Задача 2.** Найти площадь фигуры, ограниченной трехлепестковой розой $r = a\sin 3t$.

Р е ш е н и е.

Постройте кривую. При изменении аргумента $t$ от 0 до $\pi/6$ описывается 1/6 часть кривой. По чертежу видим, что искомую площадь можно найти как площадь 1/6 части фигуры, умноженной на 6, при этом $t$ меняется от 0 до $\pi/6$.

Ответ: $S = \dfrac{a^2\pi}{4}$.

**Задача 3.** Найти площадь фигуры, вырезаемой окружностью $r = \sqrt{3}\sin t$ из кардиоды $r = 1 + \cos t$.

Решение.

Постройте рисунок (рис. 87).

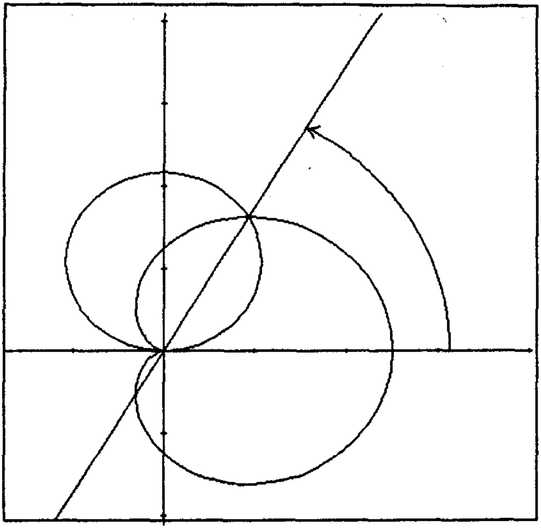


**Рис. 87**

Видим, что кривые пересекаются в двух точках. Найдем эти точки. $\sqrt{3}\sin t = 1 + \cos t$ при $t = 0$ и при $t = \pi/3$. Искомая площадь $S$ равна сумме двух площадей. По рисунку видим, что часть первой дуги, составляющей границу области, описывается при изменении аргумента от 0 до $\pi/3$, а часть второй дуги – при изменении $t$ от $\pi/3$ до $\pi$. Следовательно, площадь равна:

**S_POL**$(\sqrt{3}\sin t, 0, pi/3)$ + **S_POL**$(1 + \cos t, pi/3, pi)$ ↵ S ↵

Ответ: $S = \dfrac{3}{4}(\pi - \sqrt{3})$.

**Задача 4.** Найти суммарную площадь фигур, лежащих вне круга $r = a$ и ограниченных кривой $r = 2a\cos 3t$.

Решение.

Построим чертеж (рис. 88).

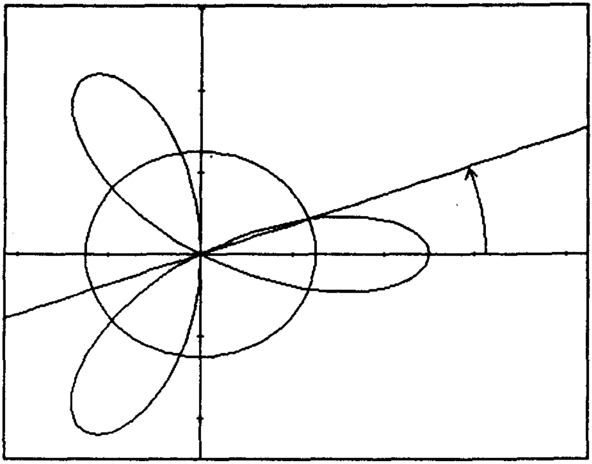


**Рис. 88**

Видим, что надо найти сумму площадей трех одинаковых фигур. Одна из этих фигур симметрична относительно полярной оси. Поэтому найдем площадь половины этой фигуры и умножим ее на 6. Из площади части лепестка трехлистника надо вычесть площадь сектора.

Определим пределы изменения аргумента $2a\cos 3t = a \Rightarrow$ $\Rightarrow t = \dfrac{\pi}{9}$ (нам надо только значение из первой четверти). Искомая площадь $S$ равна: $S = 6\left(\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/9}(2a\cos 3t)^2\,\mathrm{d}t - \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/9}a^2\,\mathrm{d}t\right)$.

6(**S_POL**($2a\cos(3t)$,0,pi/9) – **S_POL**($a$,0,pi/9)) ↵ S ↵ E ↵

Ответ: $S = a^2\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

**Задача 5.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r_1 = 3\sqrt{2}a\cos t$ и $r_2 = 3a\sin t$.

Решение.

Построим кривые $r_1 = 3\sqrt{2}a\cos t$ и $r_2 = 3a\sin t$ (рис. 89).

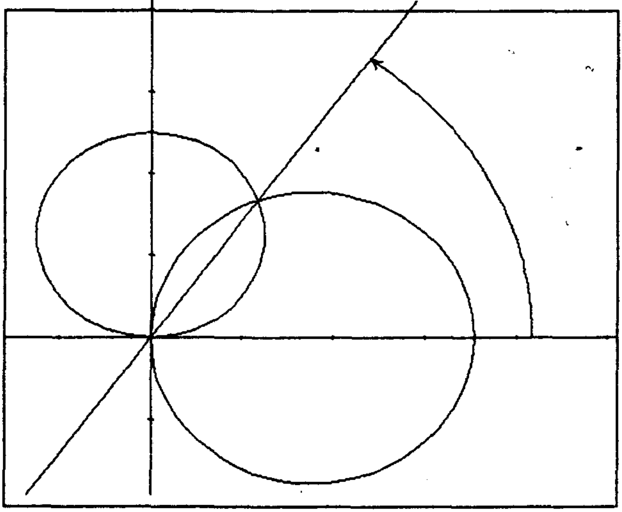


Рис. 89

Это окружности. Найдем точки пересечения этих окружностей.

$3\sqrt{2}a\cos t = 3a\sin t \Rightarrow \operatorname{tg} t = \sqrt{2} \Rightarrow t = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$. По рисунку видим, что искомая площадь $S$ равна сумме двух площадей:

$$S = S_1 + S_2,\ S_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{\operatorname{arctg}\sqrt{2}}^{\pi/2} r_1^{\,2}(t)\,\mathrm{d}t \ \text{ и } \ S_2 = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}} r_2^{\,2}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Продолжите решение задачи самостоятельно.

Ответ: $S = \frac{9}{4}a^2(\pi - \sqrt{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{2})$.

**Задача 6.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r = \cos t$.

Ответ: $S = \frac{\pi}{4}$.

**Задача 7.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r = \sqrt{3}\sin t$.

Ответ: $S = \frac{3\pi}{4}$.

**Задача 8.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r = a\sqrt{\sin 4t}$.

Ответ: $S = a^2$.

**Задача 9.** Найти площади фигур, ограниченных кривыми $r = a$, $r = a(1 - \cos t)$, $a > 0$.

## Длина дуги, заданной в декартовых координатах

Пусть плоская кривая задана явно уравнением $y = y(x)$, $x \in [a; b]$, где $y(x)$ – непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a; b]$ функция. Тогда ее длина равна $L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$.

Введите функцию для вычисления длины дуги, заданной в декартовых координатах. Назовите ее, например, **DL_DEC**.

### ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Найти длину дуги цепной линии $y = e^{x/2} + e^{-x/2}$ между прямыми $x = 0$ и $x = 2$.

Решение.

Постройте кривую. Установите MANAGE BRANCH Any.

**DL_DEC**$(e^{x/2} + e^{-x/2}, 0, 2)$ ↵ S ↵. Результат: $e - \frac{1}{e}$.

Ответ: $L = e - e^1 \approx 2.350$.

**Задача 2.** Найти длину дуги параболы $2y = x^2 - 3$ между точками пересечения ее с осью абсцисс.

Ответ: $L = \ln(\sqrt{3} + 2) + 2\sqrt{3}$.

## Длина дуги, заданной параметрически

Пусть плоская кривая задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, где $x(t)$, $x(t)$ – непрерывно дифференцируемые на $[\alpha; \beta]$ функции. Тогда ее длина вычисляется по формуле $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$.

Введите функцию, решающую поставленную задачу. Назовите ее, например, **DL_PAR**.

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Найти длину дуги петли $x(t)=\sqrt{3}t^2$, $y(t)=t-t^3$.

Решение.

Постройте рисунок. Точка кривой обегает петлю при изменении $t$ от $-1$ до 1.

**DL_PAR**$(\sqrt{3}t^2, t-t^3, -1, 1)$ ↵ S ↵. Результат: 4.

Ответ: $L=4$.

**Задача 2.** Найти длину дуги $\left[\dfrac{t^6}{6}, 2-\dfrac{t^4}{4}\right]$ между первыми двумя точками пересечения с осями координат.

Решение.

Постройте кривую. Легко определить, что надо найти длину дуги при значениях параметра $t\in\left[0;2^{3/4}\right]$.

Ответ: $L=\dfrac{13}{3}$.

**Задача 3.** Найти длину дуги кардиоиды $x(t)=2\cos t-\cos 2t$, $y(t)=2\sin t-\sin 2t$.

Ответ: $L=16$.

**Задача 4.** Найти длину дуги развертки круга $x(t)=a(\cos t+t\sin t)$, $y(t)=a(\sin t-t\cos t)$, при $t\in[0;2\pi]$.

Ответ: $L=2a\pi^2$. (Установите MT Collect.)

**Задача 5.** Найти длину петли $x(t)=\dfrac{t^3}{3}-t$, $y(t)=t^2+2$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

**Задача 6.** Найти длину дуги кривой $x(t)=e^t\cos t$, $y(t)=e^t\sin t$, $t\in[0;\ln\pi]$.

Ответ: $L=2\sqrt{\pi}-\sqrt{2}$.

**Задача 7.** Найти длину дуги одной арки циклоиды $x(t)=a(t-\sin t)$, $y(t)=a(1-\cos t)$.

Ответ: $L=8a$.

## Длина дуги, заданной в полярных координатах

В дальнейшем в теме «Применения определенного интеграла» не будут приводиться формулы, в соответствии с которыми вводятся функции, так как по виду функции легко определить саму формулу.

Длина плоской кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(t)$, $t \in [a, b]$, определяет функция **DL_POL**.

$$\mathbf{DL\_POL}(r,a,b,t) := \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2}\,\mathrm{d}t$$

### ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Найти длину дуги $r = \sin^3 \frac{t}{3}$ от $t = 0$ до $t = \pi/4$.

Решение.

$\mathbf{DL\_POL}(\sin(t/3)\verb|^|3,0,\pi/4)$ ↵ S ↵. Результат: $\frac{\pi}{8} - \frac{3}{8}$.

Ответ: $L = \frac{\pi}{8} - \frac{3}{8}$.

**Задача 2.** Найти длину дуги кардиоиды $r = a(1 + \cos t)$.
Ответ: $L = 8a$ .

**Задача 3.** Найти длину дуги $r = a(1 - \sin t)$ , $t \in [-\pi/2; -\pi/6]$.

## Вычисление объема тела вращения

Пусть функция $u = u(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a; b]$. Объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной графиком функции $u = u(x)$, отрезками прямых $x = a$ и $a = b$, определяет функция **V_VR_DECX**.

$$\mathbf{V\_VR\_DECX}(u,a,b,x) := \pi \int_a^b u^2\,\mathrm{d}x$$

В случае когда кривая вращается вокруг оси ординат, можно использовать эту же функцию, но только не забывайте, что если $u$ есть функция аргумента $y$, $u = u(y)$, то при запросе

***вместо х надо вводить у,*** *а вместо значений а и b надо ввести значения* ***ординат*** *начальной и конечной точек дуги.*

Пусть функция непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a; b]$. Тогда объем тела, образованного при вращении этой фигуры вокруг оси ординат, можно определить также при помощи функции **V_VR_DECY**.

$$\mathbf{V\_VR\_DECY}(u,a,b,x) := 2\pi \int_a^b x u \, \mathrm{d}x$$

Пусть функция задана параметрически уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in [a, b]$, где функция $u = u(t)$ имеет непрерывную неотрицательную производную на $[a, b]$ и функция $v = v(t)$ непрерывна и неотрицательна на $[a, b]$. Тогда объем тела вращения (вокруг оси абсцисс) определяется функцией **V_VR_PAR**.

$$\mathbf{V\_VR\_PAR}(u,v,a,b,t) := \pi \int_a^b v^2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t$$

Из условий следует, что функция $u = u(t)$ не убывает на интервале $(a, b)$. Если она убывает на этом интервале, то надо поменять пределы интегрирования или взять функцию **V_VR_PAR** со знаком «минус».

Пусть функция $r = r(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $0 \le a < b \le 2\pi$. Объем тела, образованного при вращении сектора $a \le t \le b$, $0 \le r \le r(t)$ вокруг полярного луча, определяет функция **V_VR_POL**.

$$\mathbf{V\_VR\_POL}(r,a,b,t) := \frac{2\pi}{3} \int_a^b r^3 \sin t \, \mathrm{d}t$$

Пусть функция $r = r(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $-\pi/2 \le a < b \le \pi/2$. Объем тела, образованного при вращении сектора $a \le t \le b$, $0 \le r \le r(t)$ вокруг луча $t = \pi/2$, определяет функция **V_VR_POLPI**.

$$\mathbf{V\_VR\_POLPI}(r,a,b,t) := \frac{2\pi}{3} \int_a^b r^3 \cos t \, \mathrm{d}t$$

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной линиями $y = x/2$, $x = 4$, $x = 6$, вокруг оси абсцисс.

Решение.

**V_VR_DECX**$(x/2,4,6)$ ↲ S ↲. Результат: $\dfrac{38\pi}{3}$.

Ответ: $V = \dfrac{38\pi}{3}$.

**Задача 2.** Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной линиями $y = x^2/4$, $y = 1$, $y = 5$, вокруг оси ординат.

Решение.

Воспользуемся функцией **V_VR_DECX**. Из условий задачи следует, что $x = \sqrt{4y}$.

**V_VR_DECX**$(\sqrt{4y},1,5,y)$ ↲ S ↲. Результат: $48\pi$.

**Задача 3.** Найти объем тела, образованного вращением эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$ вокруг его малой оси.

Решение.

Постройте эллипс. Его малая ось лежит на оси ординат, при этом $y$ меняется от $-2$ до 2. Воспользуемся функцией **V_VR_DECX**. Выразим $x$ из равенства $4x^2 + 9y^2 = 36$, считая $x \geq 0$.Найдем половину объема и результат умножим на 2.

$2\cdot$**V_VR_DECX**$(3\sqrt{4-y^2}/2,0,2,y)$ ↲ S ↲. Результат: $24\pi$.

Ответ: $V = 24\pi$.

В задачах 4—6 найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг прямой $y = 0$.

**Задача 4.** $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi/2$.Ответ: $\pi^2/4$.

**Задача 5.** $y = \sqrt{x}e^{-x}$, $x = 0$, $x = a$.

**Задача 6.** $y = \dfrac{\ln x}{x}$, $x = 1$, $x = e$.

**Задача 7.** Найти объем тела, образованного при вращении круга $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ вокруг оси $Oy$.

Р е ш е н и е.

Постройте окружность $(x-1)^2+y^2=1$ и прямую $x=1$. Эта прямая разбивает окружность на две дуги. Мысленно представьте тело, которое получится при вращении круга вокруг оси $Oy$. Ясно, что объем тела можно вычислить как разность объемов двух тел. Одно из них образовано при вращении полуокружности, лежащей правее прямой $x=1$, отрезком $[-1;1]$ оси ординат и отрезками, соединяющими концы этого отрезка с концами полуокружности. Второе тело образовано при вращении фигуры, образованной второй полуокружностью и теми же отрезками. Воспользуемся функцией **V_VR_DECX**. Уравнения полученных полуокружностей $x=1+\sqrt{1-y^2}$ и $x=1-\sqrt{1-y^2}$.

$$\mathbf{V\_VR\_DECX}(1+\sqrt{1-y^2},-1,1,y)-$$

$$-\mathbf{V\_VR\_DECX}(1-\sqrt{1-y^2},-1,1,y)\ \ ↲\ \mathrm{S}\ ↲$$

или

$$2\mathbf{V\_VR\_DECY}(\sqrt{1-(x-1)^2},1,2)+\mathbf{V\_VR\_DECY}(\sqrt{1-(x-1)^2},0,1)$$

Ответ: $2\pi^2$.

***Замечание***. Конечно, для таких случаев можно ввести специальную функцию, назовем ее **V_VR_DECX2**($u,v,a,b,x$).

| |
|---|
| **V_VR_DECX2**($u,v,a,b,x$):= <br> **V_VR_DECX**($u,a,b,x$)–**V_VR_DECX**($v,a,b,x$) |

Введите функцию и, используя ее, решите разобранную задачу.

В задачах 8—12 найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной данными кривыми: а) вокруг оси $Ox$; б) вокруг оси $Oy$.

**Задача 8.** $y=\sin x,\ 0\le x\le\pi$.

Р е ш е н и е.

а) **V_VR_DECX** $(\sin x,0,\pi)$ ↲ S ↲. Результат: $\pi^2/2$;

б) **V_VR_DECY** $(\sin x,0,\pi)$ ↲ S ↲. Результат: $2\pi^2$.

**Задача 9.** $y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2},\ y=0,\ x=0,\ x=a.$

Ответ: а) $V=\pi a^3(\pi+2)/8$, б) $V=\pi a^3\ln 2$.

**Задача 10.** $y = e^x + 6$, $y = e^{2x}$, $x = 0$.

Р е ш е н и е.

Постройте графики функций, определите точку их пересечения. В обоих случаях объем тела надо искать как разность объемов двух тел:

а) **V_VR_DECX**$(e^x + 6, 0, \ln 3)$ – **V_VR_DECX**$(e^{2x}, 0, \ln 3)$;

б) **V_VR_DECY**$(e^x + 6, 0, \ln 3)$ – **V_VR_DECX**$(e^{2x}, 0, \ln 3)$.

> ***Замечание.*** Можно использовать функции **V_VR_DECX2** и **V_VR_DECY2**.

Ответ: а) $4\pi(9\ln 3 + 2)$; б) $3\pi\ln 3(2\ln 3 - 1)$ (после факторизации, т.е. выполнено F ↵).

**Задача 11.** $y = x$, $y = x + \sin^2 x$, $x \in [0; \pi]$.

Ответ: а) $\pi^2(4\pi + 3)/8$, б) $\pi^3/2$.

**Задача 12.** $[a\cos^3 t, a\sin^3 t]$.

Р е ш е н и е.

Постройте кривую (это астроида). Достаточно вращать фигуру, ограниченную четвертой частью дуги (например, лежащей в первой четверти) и осями координат. Получим половину искомого объема, поэтому умножим результат на 2. В силу симметрии кривой относительно обеих осей получим одно и то же тело при вращении вокруг той или иной оси, поэтому результаты вычислений должны совпадать.

а) Постройте эту четвертую часть дуги. Мы видим, что параметр $t$ изменяется при этом от 0 до $\pi/2$. Вы заметили, что $u(t)$ при этом убывает. Это ясно и так: функция $\cos t$ убывает на этом промежутке. Поэтому либо перед функцией **V_VR_PAR** надо поставить минус, либо пределы ввести в порядке от $\pi/2$ до 0.

2**V_VR_PAR**$(a\cos^3 t, a\sin^3 t, \pi/2, 0)$ ↵ S ↵.

Результат: $\dfrac{32\pi a^2}{105}$.

б) **2V_VR_PAR**$(a\sin^3 t, a\cos^3 t, 0, \pi/2)$ ↵S↵. Результат тот же. Функция $v(t)$ возрастает при изменении $t$ от 0 до $\pi/2$, в этом порядке ввели пределы изменения параметра $t$.

В задачах 13 и 14 найти объем тела, образованного вращением петли вокруг оси: а) $Ox$, б) $Oy$.

**Задача 13.** $\left[t\left(3 - t^2\right)/3, t^2\right]$.

**Задача 14.** $\left[2t-t^2,4t-t^3\right]$.

**Задача 15.** Найти объем тела, образованного при вращении фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $\left[a(t-\sin t),a(1-\cos t)\right]$ и осью абсцисс.

Ответ: а) $5\pi^2 a^3$, б) $6\pi^3 a^3$.

**Задача 16.** Найти объем тела, образованного при вращении вокруг полярного луча фигуры, ограниченной кардиоиды $r = a(1 + \cos t)$.

Решение.

Постройте кривую. Ясно, что достаточно вращать половину кривой, при $t \in [0; \pi]$.

**V_VR_POL**$(a(1+\cos t),0,\pi)$ ↵ S ↵. Результат: $\dfrac{8\pi a^3}{3}$.

Ответ: $V = \dfrac{8\pi a^3}{3}$.

**Задача 17.** Найти объем тела, образованного при вращении фигуры: а) $0 \le r \le a\sqrt{\sin i}$, б) $0 \le r \le a(1+\cos t), |t| \le \dfrac{\pi}{2}$ вокруг луча $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Решение.

**V_VR_POLPT**$(a(\cos t),-\pi/2,\pi/2)$ ↵ S ↵.
Результат: $a^3\pi(5\pi + 16)/4$.
Ответ: а) $4\pi a^3/15$, б) $a^3\pi(5\pi + 16)/4$.

**Задача 18.** Найти приближенное значение объема тела, образованного при вращении вокруг полярного луча фигуры, ограниченной лемнискаты $r = a\sqrt{2\cos 2t}$, $a > 0$.

*Указание.* При решении установите M T Direction: Expand Toward: Auto

## Вычисление площади поверхности вращения

Пусть $u = u(x)$ определена и непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Площадь поверхности, образованной при вращении графика этой функции вокруг оси абсцисс, определяет функция **S_POV_DECX**.

$$\mathbf{S\_POV\_DECX}(u,a,b,x) := 2\pi\int_a^b u\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

Пусть функция $u = u(y)$ определена и непрерывно дифференцируема на отрезке $[c; d]$, $c \geq 0$. Тогда площадь поверхности, образованной при вращении графика этой функции вокруг оси $Ox$, определяется функцией **S_POVX_DECY**.

$$\mathbf{S\_POVX\_DECY}(u,c,d,y) := 2\pi\int_c^d y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y$$

Пусть в полуплоскости $y \geq 0$ параметрически задана кривая уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in [a, b]$, где $u(t)$ и $v(t)$ — непрерывно дифференцируемые на $[a, b]$ функции. Площадь поверхности, образованной при вращении данной кривой вокруг оси $Ox$, определяет функция **S_POV_PAR**.

$$\mathbf{S\_POV\_PAR}(u,v,a,b,t) := 2\pi\int_a^b v\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

Площадь поверхности, образованной при вращении вокруг полярного луча кривой $r = r(t)$, $0 \leq a \leq t \leq b \leq \pi$, где $r(t)$ — непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция, определяет функция **S_POV_POL**.

$$\mathbf{S\_POV\_POL}(r,a,b,t) := 2\pi\int_a^b r\sin t\sqrt{r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

При том же условии площадь поверхности, образованной при вращении кривой $r = r(t)$ вокруг луча $t = \pi/2$, $-\pi/2 \leq a \leq t \leq b \leq \pi/2$, определяет функция **S_POV_POLI**.

$$\mathbf{S\_POV\_POLI}(r,a,b,t) := 2\pi\int_a^b r\cos t\sqrt{r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Найти площадь поверхности, образуемой при вращении кривой $y = x^3$ вокруг оси $Ox$.

Решение.

**S_POV_DECX**$(x^3,0,1)$ ↵ S ↵. Результат: $\pi(10^{3/2} - 1)/27$.

Ответ: $S = \pi(10^{3/2} - 1)/27$.

**Задача 2.** Найти площадь поверхности, образуемой при вращении кривой $3x = 4\cos y$, $y \in [-\pi/2; 0, y]$ вокруг оси $Oy$.

Решение.

Воспользуемся функцией **S_POV_DECX**. Из данного равенства выразим $x$: $x = 4\cos y/3$.

**S_POV_DECX**$(4\cos y/3, -\pi/2, 0)$ ↵ S ↵.

Результат: $\pi\ln 3 + \dfrac{20\pi}{9}$. Ответ: $S = \pi\ln 3 + \dfrac{20\pi}{9}$.

В задачах 3—5 найти площадь поверхности, образуемой при вращении данной кривой вокруг оси $Ox$.

**Задача 3.** $y = \sqrt{x}$, $x \in [5/4; 21/4]$.

**Задача 4.** $y = \sin x$, $x \in [0; \pi]$.

**Задача 5.** $y = 1/x$, $x \in [1; a]$.

В задачах 6 и 7 найти площадь поверхности, образованной при вращении данной кривой вокруг оси $Oy$.

**Задача 6.** $x = \operatorname{ch} y$, $y \in [\ln 2; \ln 3]$.

***Замечание.*** Напоминаем, что по определению $\operatorname{ch} t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ (гиперболический косинус). В системе Derive имеется встроенные функции для вычисления значений гиперболических функций, но можно обойтись и без них, используя их определения через показательную функцию, или можно их задать самостоятельно.

**Задача 7.** $y^2 = 2(x - 1)$, $y \in [0; 1]$.

В задачах 8—11 найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг оси $Ox$ данной кривой.

**Задача 8.** $y^2 = 4x$, $x \in [0;3]$.

Решение.

*1-й способ.*

Решите задачу, используя функцию **S_POV_DECX.**

*2-й способ.*

Воспользуемся функцией **S_POVX_DECY**. Выразим $x$ из данного равенства и найдем $y(0)$ и $y(3)$, $y(0) = 0$, $y(3) = \sqrt{12}$.

**S_POVX_DECY**$(y^2/4, 0, \sqrt{12})$ ↵ S ↵. Результат: 56π/3.

Ответ: $S = \dfrac{56\pi}{3}$.

**Задача 9.** $y^2 = 4 + x$, $x \in [-4;2]$.

**Задача 10.** $x = \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{\ln y}{2}$, $y \in [1;e]$.

**Задача 11.** $y = \dfrac{x^2}{2p}$, $x \in [0;b]$.

**Задача 12.** Найти площадь поверхности, образованной при вращении астроиды $[a\cos^3 t, a\sin^3 t]$ вокруг оси: а) $Ox$, б) $Oy$.

Решение.

Найдем половину площади и результат умножим на 2.

а) 2**S_POV_PAR**$(a\cos^3 t, a\sin^3 t, 0, \pi/2)$ ↵ S ↵.

Результат: $12\pi a^2/5$.

б) 2**S_POV_PAR**$(a\sin^3 t, a\cos^3 t, 0, \pi/2)$ ↵ S ↵.

Результат: тот же, как мы и ожидали.

**Задача 13.** Найти площадь поверхности, образованной при вращении одной арки циклоиды вокруг оси $Ox$.

Ответ: $S = 64\pi a^2/3$.

**Задача 14.** Найти площадь поверхности, образованной при вращении петли $9x^2 = y(3-y)^2$ вокруг оси: а) $Ox$, б) $Oy$.

Решение.

Перейдем к параметрическому заданию кривой. Для этого положим $y = t^2$. Получим $\left[t(3-t^2)/3, t^2\right]$, $t \in \mathrm{R}$. Постройте кривую и убедитесь в том, что полностью петля описывается при $t \in \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$. При вращении вокруг оси $Ox$ надо вращать всю петлю, но так как петля симметрична относительно оси $Oy$, то это можно учесть, искать половину площади и умножить ее на 2, а можно и сразу искать площадь всей поверхности. При вращении вокруг оси $Oy$ достаточно вращать половину дуги, будем вращать правую ее половину, то есть $t \in \left[0, \sqrt{3}\right]$:

а) **2S_POV_PAR** $(t(3-t^2)/3, t^2, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ↵ S ↵.

Результат: $\dfrac{56\sqrt{3}\pi}{5}$;

б) **2S_POV_PAR** $(t^2, t(3-t^2)/3, 0, \sqrt{3})$ ↵ S ↵. Результат: $3\pi$.

Ответ: а) $S = \dfrac{56\sqrt{3}\pi}{5}$, б) $S = 3\pi$.

**Задача 15.** Найти площадь поверхности, образованной при вращении лемнискаты $r = \sqrt{\cos 2t}$ : а) вокруг полярного луча; б) вокруг луча $\varphi = \pi/2$.

Решение.

а) **2S_POV_POL** $(\sqrt{\cos 2t}, 0, \pi/4)$ ↵ S ↵. Результат: $2\pi(2-\sqrt{2})$.

б) **2S_POV_POLI** $(\sqrt{\cos 2t}, 0, \pi/4)$ ↵ S ↵. Результат: $2\sqrt{2}\pi$.

Ответ: а) $S = 2\pi(2-\sqrt{2})$, б) $S = 2\sqrt{2}\pi$.

**Задача 16.** Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг полярного луча кривой $r = \sec\dfrac{t}{2}$.

Напоминаем, что $\sec x = 1/\cos x$.

**Задача 17.** Найти площадь поверхности, образованной при вращении кардиоиды $r = a(1+\cos t)$ вокруг полярного луча.

Ответ: $S = 32\pi a^2/5$.

## ФУНКЦИЯ SUM. ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММ ЧЛЕНОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Для вычисления сумм членов последовательности служит встроенная функция SUM.

Пусть надо вычислить сумму первых $n$ членов последовательности $x_k = f(k)$. Эта задача решается следующим образом:

**SUM** $(f(k), k, 1, n)$ ↵ S ↵.

***Замечание***. Можно использовать одну переменную $n$:

**SUM** $(f(n), n, 1, n)$ ↵ S ↵

## ЗАДАЧИ

В примерах 1–6 найти указанную сумму.

**Задача 1.** $1 + 3 + ... + (2n-1)$.

Решение.

**SUM**$(2k\text{-}1,k,1,n)$ ↲ S ↲. Результат: $n^2$.

Или **SUM**$(2n\text{-}1,n,1,n)$ ↲ S ↲.

Будем обозначать сумму $n$ слагаемых (с первого по $n$-е) через $S_n$. Мы получили, что $S_n = n^2$.

Сделайте проверку, используя тот факт, что члены последовательности $x_k = 2k - 1$ образуют арифметическую прогрессию.

**Задача 2.** $1^2 + 3^2 + ... + (2n-1)^2$.

Решение.

**SUM** $((2n-1)^2, n, 1, n)$ ↲ S ↲.

Результат: $\dfrac{n(4n^4 + 10n^3 - 10n + 1)}{5}$.

Найдем теперь $S_{n+1}$ двумя способами.

1. В полученное равенство сделаем подстановку $n: = n + 1$.

M S ↲ $n: = n + 1$ ↲ S ↲ F Rational ↲.

Результат: $(n+1)(4n^4 + 26n^3 + 54n^2 + 36n + 5)/5$.

2. Вновь воспользуемся функцией **SUM**.

**SUM** $((2n-1)^2, n, 1, n+1)$ ↲ S ↲. Результат тот же.

Как и следовало ожидать, результаты совпали. (Вспомните метод математической индукции.)

**Задача 3.** $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + ... + n(2n-1)$.

**Задача 4.** $1^2 + 2^2 + ... + n^2$.

**Задача 5.** $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + ... + (n-1) \cdot n^2$.

**Задача 6.** $1^3 + 2^3 + ... + n^3$.

Пусть требуется найти сумму членов последовательности $x_k = f(k)$ с $m$-го по $n$-й. Это делается так:

**SUM** $(2k, k, 4, 20)$ ↲ S ↲.

**Пример.** Найти сумму четных чисел с 8 до 40.

Решение.

**SUM**$(2k,k,4,20)$ ↲ S ↲. Результат: 408.

Сделайте проверку полученного результата, используя формулу суммы членов геометрической прогрессии.

# ТЕОРИЯ РЯДОВ

## Вычисление сумм рядов

Пусть дан ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$, то есть $S_n$ – сумма первых $n$ членов ряда. $S_n$ называется $n$-й частичной суммой ряда. Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то говорят, что ***ряд сходится***. $S$ называется ***суммой ряда***.

Используя функцию **SUM**, можно находить суммы некоторых числовых рядов:

**SUM** $(f(k), k, m, \text{inf})$ ↵ S ↵.

### ЗАДАЧИ

В задачах 1—3 найти сумму ряда.

**Задача 1.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^n}$.

Решение.

**SUM**(2/5^$n$,$n$,1,inf) ↵ S ↵. Результат: $\frac{1}{2}$.

Проверьте результат, используя формулу суммы членов геометрической прогрессии.

**Задача 2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$.

Решение.

**SUM**(1/(($n$+2)($n$+3)),$n$,1,inf) ↵ S ↵. Результат: $\frac{1}{3}$.

Найдем $S_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

**SUM**(1/(($n$+2)($n$+3)),$n$,1,$n$) ↵ S ↵. Результат: $\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}$.

$S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \Rightarrow \lim S_n = \frac{1}{3}$. Как видим, результаты совпали.

**Задача 3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Ответ: $S=\frac{1}{4}$.

**Задача 4.** Известно, что $\pi = 3+4\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k(2k+1)(2k+2)}$. Следовательно, при достаточно больших $n$ справедливо приближенное равенство $\pi \approx 3+4\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{(k-1)}}{2k(2k+1)(2k+2)}$. Проверить это при $n = 30$, $n = 30$, ... , $n = 100$.

Ответ: $S_{10} = 3.141406718$, $S_{100} = 3.141592411$.

При решении задачи можно воспользоваться встроенной функцией **VECTOR**. (Подробнее о ней см. ниже.)

$$\textbf{VECTOR}\,(f(n),n,10,100,10) \text{ ↵ S ↵}.$$

Здесь $f(n)=3+4\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{(k-1)}}{2k(2k+1)(2k+2)}$; вместо $f(n)$ надо ввести выражение функции.

Выполните описанные выше действия.

Можно ввести вспомогательную функцию для облегчения выполнения запросов.

Введите функцию

$$\boxed{\mathbf{V\_1PI}(a,b) := \mathbf{VECTOR}\left[3+4\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k(2k+1)(2k+2)},n,a,b\right]}$$

где $a$, $b$ – пределы изменения $n$. Как вы видите, шаг таблицы равен единице. Проделайте вычисления при: а) $n \in \overline{1,10}$, б) $n \in \overline{30,40}$, в) $n \in \overline{80,90}$. Сравните найденные числа с числом $\pi$. Сделайте выводы.

> ***Замечание.*** Здесь приведена запись в том виде, в каком она должна быть на экране. Выражение под знаком функции (**VECTOR**) вводится в круглых скобках.

**Задача 5.** Известно, что $\pi = \frac{6}{\sqrt{3}}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^k(2k+1)}$. Решите задачу, аналогичную предыдущей. Введите вспомогательную функцию **V_2PI** и найдите приближенное значение числа $\pi$ при: а) $n \in \overline{1,10}$, б) $n \in \overline{10,20}$, в) $n \in \overline{30,40}$. Сравните найденные числа с числом $\pi$. Сделайте выводы.

**Задача 6.** Известно, что

$$\pi = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left( \frac{16}{(2k-1) \cdot 5^{2k-1}} - \frac{4}{(2k-1) \cdot 239^{2k-1}} \right).$$

Решите задачу, аналогичную задаче 1, при $n = 4$, $n = 5$, ..., $n = 6$.

Вновь удобно использовать функцию **VECTOR**.

Обратите внимание на то, что сумма первых шести членов совпадает с числом $\pi$ с точностью не менее девяти знаков после запятой, в то время как сумма первых ста членов ряда, приведенного в примере 4, не обеспечивает такой точности. Первый ряд сходится гораздо медленнее, чем второй.

## Степенные ряды. Ряд Тейлора

Ряд вида

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n,$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ — некоторые числа, называется ***степенным***.

Числа $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ называются ***коэффициентами ряда***.

Говорят, что функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд в некотором промежутке, если она является суммой этого ряда в рассматриваемом промежутке.

Если функция разлагается в степенной ряд в некотором промежутке, то это разложение единственное, причем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Этот ряд называется ***рядом Тейлора***.

Интервал сходимости степенного ряда симметричен относительно точки $x = x_0$.

Если $x_0 = 0$, то ряд имеет вид: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Он называется ***рядом Маклорена*** или ***рядом Тейлора в окрестности точки*** $x_0 = 0$.

Многочлен $\sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k$ называется ***многочленом Тейлора***.

Если функция $f(x)$ разлагается в некотором интервале в ряд Тейлора, то в этом интервале при достаточно больших $n$ справедливо приближенное равенство $f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k$.

Для нахождения многочлена Тейлора для функции $f(x)$ служит встроенная функция **TAYLOR**.

**TAYLOR**($f(x)$, $x$,$a$,$n$) ↲ S ↲.

Здесь $a$ – точка, в окрестности которой функция $f(x)$ разлагается в ряд, $n$ – наивысшая степень, в которой двучлен $x$–$a$ входит в разложение. Таким образом, в результате получается многочлен порядка $n$ .

**Пример. TAYLOR**(sin($x$),$x$,0,3) ↲ S ↲. Результат: $x - \frac{x^3}{6}$.

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Получите многочлен Тейлора для функции sin$x$ в окрестности точки $x_0 = 0$ при $n = \overline{4,6}$.

Вы видите, что в разложение входят только нечетные степени $x$. Этого и следовало ожидать: функция sin$x$ является нечетной, и каждое слагаемое получаемых многочленов также является нечетной функцией. Поэтому при $n = 3$ и $n = 4$ получаем одинаковые результаты, при $n = 5$ и $n = 6$ – тоже и так далее.

**Задача 2.** Получите первые 5 членов разложения функции sin$x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$.

**Задача 3.** Получите первые 7 членов разложения функции sin$x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$. Вычислите значение полученного многочлена при $x = 2$, после чего найдите значение sin2 и сравните полученные результаты.

Р е ш е н и е.

**TAYLOR**(sin($x$),$x$,0,13) ↵ S ↵ M S $x$: = 2 ↵ X ↵.

Результат: 0.909297.

**SIN**2 ↵ S ↵. Результат тот же.

**Задача 4.** Получите многочлены Тейлора для функции sin$x$ при нечетных $n = \overline{9,15}$ и вычислите значения полученных многочленов при $x = 2$.

Р е ш е н и е.

Воспользуемся функцией **VECTOR**.

**VECTOR**(**TAYLOR**(sin($x$),$x$,0,$n$),$n$,9,15,2) ↵ S ↵ M S $x$: = 2 ↵ X ↵.

Результат: [0.909347, 0.909296, 0.909297, 0.909297].

Сравните полученные ответы со значением sin2. Какие выводы можно сделать?

**Задача 5.** Получите многочлены Тейлора для функции sin$x$ при нечетных $n = \overline{3,15}$ . Постройте график функции sin$x$, а затем последовательно графики каждого из полученных многочленов. В каждом случае зрительно оцените промежуток, на котором график многочлена совпадает с графиком функции sin$x$.

Р е ш е н и е.

1. **VECTOR**(**TAYLOR**(sin($x$),$x$,0,$n$),$n$,3,15,2) ↵ S ↵.

2. Используя стрелки ← и →, выделите первый многочлен и постройте его график. Так как функция sin$x$ и все полученные многочлены являются нечетными функциями, можно оценить только правую границу значений аргумента $x$, при которых графики многочлена и функции sin$x$ совпадают. Затем, используя стрелки, выделите второй многочлен и повторите все действия. Результаты оформите в виде таблицы.

| $n$ | 3 | 5 | 7 | ... | 13 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| интервал | | | | | (–4.5; 4.5) | (–5.4; 5.4) |

Вы видите, что с ростом числа $n$, то есть с ростом порядка получаемого многочлена, длина интервалов, на которых совпадают графики функции sin$x$ и многочленов, увеличивается. Полученные результаты, конечно, весьма приблизительные. Меняя масштаб изображения, можно уточнять результаты (рис. 90 и 91).

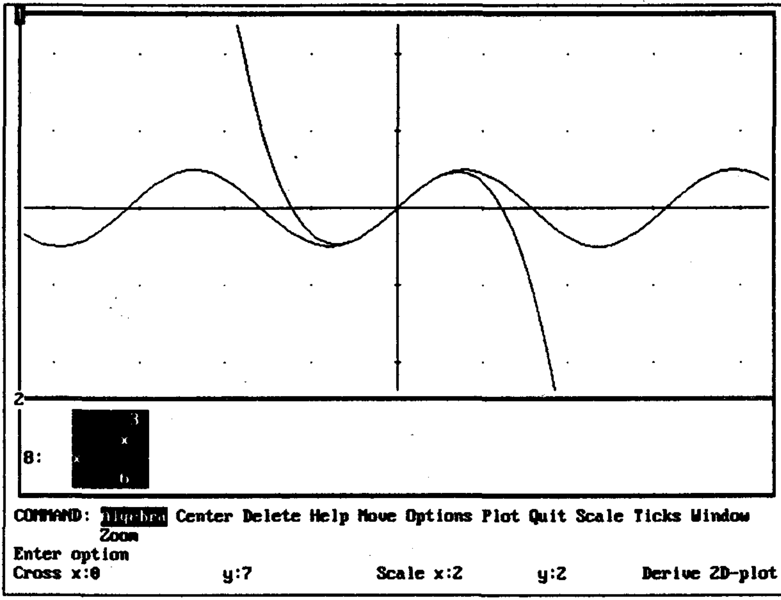

1
2
8:
COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window Zoom
Enter option
Cross x:0 y:7 Scale x:2 y:2 Derive 2D-plot

**Рис. 90**

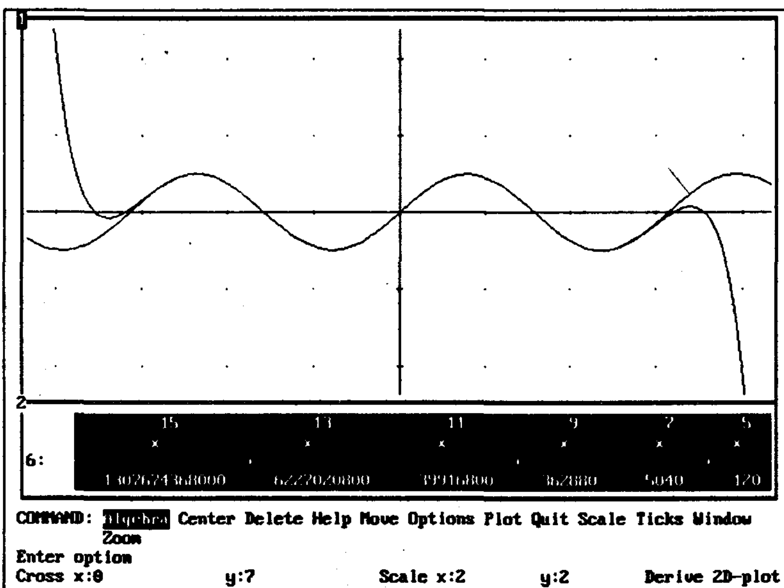

1
2
6:
15 13 11 9 7 5
1307674368000 6227020800 39916800 362880 5040 120
COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window Zoom
Enter option
Cross x:0 y:7 Scale x:2 y:2 Derive 2D-plot

**Рис. 91**

На рисунках хорошо видно, что график многочлена Тейлора при $n = 15$ совпадает с графиком функции $\sin x$ на бо́льшем интервале, чем график многочлена Тейлора при $n = 3$.

**Задача 6.** Проверьте полученные результаты аналитически. Заполните таблицу при $n = 13$ и $\alpha = 3$, $\alpha = 4$, $\alpha = 4.5$, $\alpha = 5$, $\alpha = 5.2$, при $n = 15$ и $\alpha = 4$, $\alpha = 4.5$, $\alpha = 5$, $\alpha = 5.5$, $\alpha = 6$.

| $n$ | $\sin\alpha$ | Значение $\sin\alpha$ | $S_n$ — значение многочлена Тейлора порядка $n$ при $x = \alpha$. | $\lvert S_n - \sin\alpha\rvert$ |
|---|---|---|---|---|

Проанализируйте полученные результаты.

Возникает вопрос: сколько членов ряда надо взять, чтобы с заданной степенью точности вычислить сумму этого ряда? Если ряд знакочередующийся, то задача решается просто.

***Если в качестве суммы сходящегося знакочередующегося ряда взять сумму нескольких его первых членов, то модуль допущенной ошибки не превышает модуля первого из отброшенных членов.***

**Задача 7.** Используя разложение функции $\sin x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$, вычислите $\sin 2$ с точностью до $h = 10^{-5}$.

Решение.

**TAYLOR**(sin($x$),x,0,13) ↵ S ↵ M S $x$: = 2 ↵ X.

Знаки в полученном многочлене чередуются. В том, что начиная с некоторого $n$ многочлены Тейлора принимают при $x = 2$ то же значение, что и $\sin 2$, мы убедились зрительно и аналитически. В курсе математического анализа доказывается, что ряд Тейлора для функции $\sin x$ сходится к этой функции на всей числовой прямой.

Выделите при помощи стрелок ← и → первое слагаемое полученной суммы и вычислите его значение: X ↵. Модуль результата меньше $10^{-5}$. Выделите теперь второе слагаемое суммы и вычислите его значение. Его модуль больше $10^{-5}$. Следовательно, для обеспечения нужной степени точности достаточно взять слагаемые со второго по последнее (или с первого по предпоследнее справа налево). Можно скопировать строку (**F3**), вычесть из нее первое слагаемое (выделить его и скопировать в новую строку) или вновь воспользоваться функцией **TAYLOR**.

**TAYLOR**(sin($x$),x,0,11) ↵ S ↵ M S $x$: = 2 ↵ X ↵.

Результат: 0.909296.

Округляя с точностью до $10^{-5}$, получаем 0.90930 .

**Задача 8.** Вычислите sin3 с точностью до $h = 10^{-5}$.

Решение.

*1-й способ.* Решите задачу аналогично тому, как была решена предыдущая задача.

Ответ: $n = 15$.

*2-й способ.* Воспользуемся тем, что $\sin 3 = \sin(\pi-3)$. $\pi-3 = 0.141592$.

Получим многочлен Тейлора для функции $\sin x$ в окрестности точки $x_0 = 0$ и подставим в него $x = 0.141592$.

**TAYLOR**(sin($x$),$x$,0,5) ↵ S ↵ M S $x$: = 0.141592 ↵.

Оценивая модули слагаемых, как это делали в предыдущем случае, получаем, что надо взять всего 2 слагаемых для обеспечения нужной степени точности, а не 8 членов, как при решении задачи первым способом.

Результат: 0.141119. Округлив до $10^{-5}$, получаем 0.14112.

Заметьте, что $\sin(\pi-x) \approx \pi-x$. Мы могли это предвидеть. Объясните, почему.

**Задача 9.** Проделайте упражнения, подобные разобранным, для функций $\cos x$, $\mathrm{arctg}\, x$. Вычислите, например, cos0.5, arctg0.5 с заданной степенью точности.

**Задача 10.** Разложить в ряд Тейлора функцию $1/(x + 3)$ в окрестности точки $x_0$ при: а) $x_0 = 0$, б) $x_0 = -2$, в) $x_0 = 1$.

Решение.

а) Представим функцию в виде $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{3}}$

1. Положим $t = \dfrac{x}{3}$. Получим многочлен Тейлора для функции 1/(1 + t).

**TAYLOR**(1/(1+$t$),$t$,0,4) ↵ S ↵. Результат: $t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$.

Как и ожидали, члены полученного многочлена образуют геометрическую прогрессию.

2. В полученный многочлен подставим $\dfrac{x}{3}$ вместо $t$. M S $t$: = $x$/3 ↵.

3. Результат надо разделить на 3: F4/3 ↵ S ↵ E (Expand) ↵.

Результат: $\dfrac{x^4}{243} - \dfrac{x^3}{81} + \dfrac{x^2}{27} - \dfrac{x}{9} + \dfrac{1}{3}$.

4. По полученному многочлену можно определить закономерность. Очевидно, $\frac{1}{x+3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{3^{n+1}}$. Это разложение справедливо, если $\left|\frac{x}{3}\right|<1$, то есть при $|x|<3$. Это следует из того, что члены ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = x/3$.

б) Представим функцию в виде $\frac{1}{1+(x+2)}$. Продолжите решение задачи самостоятельно. Укажите интервал сходимости полученного ряда.

> ***Замечание.*** Вы видите, что решение этой задачи мало отличается от решения ее «вручную». Конечно, можно получить многочлены Тейлора непосредственно, без предварительного преобразования функции:
>
> **TAYLOR**(1/(*x*+3),*x*,–2,4) ↵ S ↵.
>
> Результат получим в виде многочлена (такой же многочлен получим, если раскрыть скобки в предыдущем результате). Но в этом случае трудно установить закономерность и определить интервал сходимости ряда.

в) Представим функцию в виде $\frac{1}{(x-1)+4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}$.

Продолжите решение задачи самостоятельно.

В курсе математического анализа доказывается, что ***в интервале его сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз, а также его можно почленно интегрировать по любому отрезку, лежащему в интервале сходимости ряда.***

**Задача 11.** Представить в виде ряда $\int_0^x x^2e^{-x^2}\,dx$.

Решение.

1. **TAYLOR** $(x^2e^{-x^2},x,0,10)$ ↵ S ↵.

2. **INT**(<F3>, *x*) ↵ S ↵ (то есть можно скопировать подынтегральное выражение из предыдущей строки при помощи клавиши **F3**). Можно сразу ввести **INT**(**TAYLOR** $(x^2e^{-x^2},x,0,10)$ ,*x*).

3. Выделите знаменатель в первом слагаемом и разложите его на множители ( F ), проделайте то же самое со знаменателем второго слагаемого, установите закономерность, запишите разложение интеграла в ряд и установите область его сходимости.

**Задача 12.** Вычислить $\int\limits_0^{1/2}\frac{\mathrm{acrtg}\,x}{x}\mathrm{d}x$ с точностью до: а) $h = 10^{-4}$, б) $h = 10^{-5}$, разложив подынтегральную функцию в ряд Тейлора.

Решение.

Воспользуемся тем, что степеннóй ряд можно интегрировать почленно по отрезку, лежащему в интервале сходимости ряда. Можно сразу находить многочлен Тейлора для функции arctg$x/x$ или сначала найти многочлен для функции arctg$x$, затем разделить его на $x$.

Закончите решение задачи самостоятельно.

Ответ: б) 0.48722.

**Задача 13.** Вычислить с точностью до $h = 0^{-5}$ интеграл а) $\int\limits_0^{/4}\sin x^2dx$, б) $\int\limits_0^{/8}\frac{\sin x^2}{x}dx$.

**Задача 14.** Вычислить $\int\limits_0^{/2}\sqrt{1+x^3}dx$ с точностью до $h = 10^{-5}$ двумя способами.

**Задача 15.** $f(x) = \frac{\mathrm{acrtg}\,x}{x}$. Найдите $f^{(13)}(0)$ и $f^{(14)}(0)$ двумя способами.

Решение.

*1-й способ.* Воспользуйтесь встроенной функцией **DIF**.

*2-й способ.* Нам известно, что коэффициенты ряда Тейлора находятся по формуле $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, а также, что разложение функции в ряд Тейлора единственное. Пользуясь этими двумя фактами, решите задачу.

**Задача 16.** Является ли точка $x = 0$ точкой перегиба графика функции $y = \frac{x^3}{2} - \mathrm{tg}\,x + \sin x$?

Решение.

Воспользуемся достаточным условием наличия точки перегиба с использованием производных высших порядков. Разложим данную функцию в ряд Маклорена.

**TAYLOR** $\left(\dfrac{x^2}{2} - \operatorname{tg} x + \sin x, x, 7\right)$ ↵ S ↵.

Результат: $-\dfrac{13x^7}{240} - \dfrac{x^5}{8}$.

Коэффициенты при нулевой, первой, ..., четвертой степенях переменной $x$ равны нулю, коэффициент при $x^5$ не равен нулю, следовательно, $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{(4)}(0) = 0$, а $y^{(5)}(0) = -15 \neq 0$. $n = 5$ – нечетное число, следовательно, точка (0, 0) – точка перегиба графика данной функции.

# ФУНКЦИЯ VECTOR

Функция **VECTOR** служит для построения таблиц значений функции.

$$\textbf{VECTOR}\ (f(x), x, m, n, h)$$

Здесь $f(x)$ – функция, для которой строится таблица, $h$ – шаг таблицы, $x \in [m; n]$. Если $h = 1$, его можно не указывать.

Вместо $f(x)$ может быть некоторая функция от $f(x)$.

Рассмотрим простые примеры.

**1.** Введите **VECTOR**($x$+$k$,$k$,1,2) ↵ S ↵. Результат: [$x$+1, $x$+2].

**VECTOR**($x$+$k$, $k$, 1, 1) ↵ S ↵.

**VECTOR**($x$+$k$, $k$, 1, 5) ↵ S ↵.

**2.** Введем функцию

**PROB_VECT**($n$): = **VECTOR**($x$+$k$, $k$, 1, $n$).

Введите, например,

**PROB_VECT**(5) ↵ S ↵.

Результат: [$x$+1, $x$+2, $x$+3, $x$+4, $x$+5].

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Построить таблицу значений функции $\sin x$ на отрезке [0; 1] с шагом $h = 0{,}2$.

Решение.

**VECTOR**(sin*x*, *x*, 0, 1, 0.2) ↵ S ↵.

Результат: $\left[0, \sin\frac{1}{5}, \sin\frac{2}{5}, \sin\frac{3}{5}, \sin\frac{4}{5}, \sin 1,\right]$ X ↵.

В результате получите приближенное значение функций с установленной точностью.

**Задача 2.** Найти производные функции $y = \sin x$ $k$-го порядка, где $k = \overline{1{,}4}$.

Решение.

**VECTOR(DIF**(sin2*x*, *x*, *k*), *k*, 1, 4) ↵ S ↵

Результат: [2cos2*x*, –4sin2*x*, –8cos2*x*, 16sin2*x*]

**Задача 3.** Пусть $S_n = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$. Найдите значения $S_k$, $k = \overline{1{,}5}$.

Решение.

**VECTOR(SUM**(*k*^3, *k*, 1, *n*), *n*,1, 5) ↵ S ↵

Результат: [1, 9, 36, 100, 225].

Выделите курсором $\sum_{k=1}^{n} k^3$, скопируйте (**F3**) и упростите (↵ S ↵).

Вы получите формулу для нахождения суммы $S_n = 1^3 + 2^3 + + ... + n^3$. Введите функцию, решающую задачу нахождения этой суммы, и функцию, решающую задачу нахождения $S_k$, где $k$ принимает натуральные значения из указанного промежутка. Решите задачу снова, используя эти функции. Определите формулу, по которой можно вычислить $S_n$

Введите указанную ниже строку (задачи 4—6) и упростите ее. Предварительно определите, что получится в результате.

**Задача 4. VECTOR(INT**(1/*x*^*n*, *x*), *n*, 1, 5)

**Задача 5. VECTOR(SOLVE**(sin(*nx*) =1, *x*), *n*, 1, 5)

**Задача 6. VECTOR(VECTOR**(*x*2^*y*, *x*, 1, 4),*y*, 1, 4)

**Задача 7.** Приведены строки #15, #17, #19, #21. После ввода каждой из них было выполнено ↵ S. Какие результаты получатся в строках #16, #18, #20, #22?

#15: VECTOR(DIF($x^4 + x, x, -k$), $k$,1,3)

#17: DIF(#15, $x$)

#19: INT(#15, $x$)

#21: INT(#15, $x$,0,1)

## Вычисление приближенных значений определенных интегралов

При вычислении некоторых определенных интегралов невозможно найти их точное значение, так как не существует первообразной для подынтегральной функции, но можно найти их приближенное значение.

### ЗАДАЧИ

**Задача 1**. Вычислить $\int_0^1 e^{-x^3}\,\mathrm{d}x$.

Решение.

$$\mathrm{INT}(e^{-x^3},x,0,1) \;↵$$

Попробуйте упростить (S ↵). Вы видите, что Derive переписал это выражение еще раз, следовательно, он не может найти первообразную.

Решение задачи такое:

$$\mathrm{INT}(e^{-x^3},x,0,1) \;↵\; \mathrm{X} \;↵$$

Вычислите интегралы

**Задача 2**. $\int_0^1 \cos x^2\,\mathrm{d}x$.

**Задача 3**. $\int_0^{1,2} \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$.

**Задача 4**. $\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Познакомимся с самыми простыми приближенными методами вычисления определенных интегралов.

Известно, что геометрический смысл определенного интеграла состоит в том, что $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y=f(x)$, снизу – отрезком $[a, b]$, по бокам – прямыми $x = a$, $x = b$. Этот факт используют при вычислении приближенных значений определенных интегралов.

**Метод левых прямоугольников.** Разобьем отрезок $[a, b]$ на $n$ равных частей точками $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$. Заменим площадь частичной криволинейной трапеции с основанием $[x_k; x_{k+1}]$ площадью прямоугольника с основанием $[x_k; x_{k+1}]$ и высотой $f(x_k)$. Тогда площадь всей криволинейной трапеции приблизительно равна $\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$. Поэтому $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k)$.

Введем функцию

$$\boxed{\mathbf{PL\_PRYAM}(u,a,b,n) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \lim_{x \to a+k(b-a)/n} u}$$

Запись имеет такой же вид, как и на экране.

**Задача.** Вычислить $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ (X ↲) методом прямоугольников.

Решение.

1. Вычислите значение интеграла при $n = 20, n = 30, n = 100$.

**PL_PRYAM** ($e^{-x^2}$,0,1,100). Результат: 0.749978.

Продолжите решение самостоятельно. Сравните ответы и сделайте вывод.

Введите функции для вычисления площади фигуры по формуле правых прямоугольников и вычислите те же интегралы. Сравните результаты.

В качестве высоты прямоугольника можно взять также значение функции $f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$, то есть значение функции в середине отрезка $\left[x_k; x_{k+1}\right]$.

**Формула трапеций.** Заменим площадь частичной криволинейной трапеции с основанием $[x_k; x_{k+1}]$ площадью трапеции с основаниями $f(x_k)$ и $f(x_{k+1})$ и высотой, равной длине отрезка $[x_k; x_{k+1}]$. Тогда, считая длины всех частичных отрезков одинаковыми, получаем

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2n}(b-a)(f(a) + f(b)) + \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k).$$

Введем функцию

$$\boxed{\mathbf{PL\_TRAP}(u,a,b,n) := \frac{b-a}{2n}\left(\lim_{x\to a} u + \lim_{x\to b} u\right) + \sim \sum_{k} \frac{b-a}{n} \lim_{x\to a+k(b-a)/n} u}$$

Вычислите те же интегралы, которые вычисляли методом левых прямоугольников. Сравним эти методы. Вычислим, например, $Y = \int_0^{1,2} \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$ обоими методами при нескольких значениях $n$.

| $n$ | метод прямоугольников | метод трапеций |
|---|---|---|
| 10 | $Y$=0.370174 | 0.423694 |
| 1000 | $Y$=0.421979 | 0.422514 |
| 2000 | $Y$=0.422246 | 0.422513 |
| 3000 | $Y$=0.422335 | 0.422514 |
| 5000 | $Y$=0.422406 | 0.422513 |

Сделайте выводы.

**Метод Симпсона.** Приближенное значение определенного интеграла можно вычислить также по формуле Симпсона:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1})]$$

Здесь $m$ – обязательно четное число. $h = \dfrac{b-a}{2m}$, $y_0 = a$, $y_{2m} = b$. Иначе эту формулу можно переписать в виде:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2m}[f(a) + f(b) + 2(f(a+2h) + f(a+4h) + \ldots +$$
$$+ f(a+(2m-2)h)) + 4(f(a+h) + f(a+3h) + \ldots + f(a+(2m-1)h))].$$

Для вычисления значений сумм, стоящих в скобках, введем вспомогательные функции.

$$\mathbf{VS\_SIM1}(u,a,b,m) := \sum_{k=1}^{m-1} \lim_{x \to a+k(b-a)/m} u$$

$$\mathbf{VS\_SIM2}(u,a,b,m) := \sum_{k=1}^{m-1} \lim_{x \to a+(b-a)(2k-1)/(2m)} u$$

$$\mathbf{SIMPSON}(u,a,b,m) :=$$
$$\frac{b-a}{6m}\left(\lim_{x \to a} u + \lim_{x \to b} u + 2\,\mathrm{VS\_SIM1}(u,a,b,m) + 4\,\mathrm{VS\_SIM2}(u,a,b,m)\right)$$

Используя функцию **VECTOR**, введите функцию для нахождения нескольких значений функции **SIMPSON** при изменении $m$ в указанных пределах с заданным шагом. Назовите ее, например, **PROBA_S**.

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Вычислить интеграл $\int_0^{1/2}(x^3 - 2x)\,dx$, используя встроенную функцию **INT**, а затем по формуле Симпсона.

Решение.

1. **INT**$(x^3 - 2x, x, 0, 1/2)$ ↵ X ↵. Результат: –0.234375.
2. **SIMPSON** $(x^3 - 2x, 0, 1/2, 2000000)$ ↵ S ↵.

Результат: –0.2343748.

Вы видите, что результат появился практически мгновенно. При вычислениях интегралов от более сложных функций вычисления могут длиться гораздо дольше.

Используя функцию **PROBA_S**, подберите значение $m$, начиная с которого результаты вычисления при помощи функции **INT** и при помощи функции **SIMPSON** совпадают.

**Задача 2.** Используя функцию **PROBA_S**, определите значения интеграла $\int_{1/4}^{1/2}\frac{e^{-x}}{x}\,dx$ при $m \in [10000, 20000]$ с шагом $h = 5000$.

# ФУНКЦИЯ IF

Функция **IF** есть начиная с версии 2.02.

**IF** *(r, t, f)* – если отношение *r* истинно, то выдает выражение *t*; если оно ложно, то выдает выражение *f*.

**IF** (*r*, *t*, *f*, *u*) – если отношение *r* истинно, то выдает выражение *t*; если оно ложно, то выдает выражение *f*; а если истинность неизвестна, то выдает *u*.

**IF** (*r* **AND** *s*, *t*, *f*) – если отношение *r* ложно, выдает выражение *f*; в противном случае выдает **IF**(*s*, *t*, *f*).

**IF** (*r* **OR** *s*, *t*, *f*) – если отношение *r* истинно, выдает выражение *t*; в противном случае выдает **IF**(*s*, *t*, *f*).

**IF** (**NOT** *r*, *t*, *f*) – если отношение *r* ложно, выдает выражение *t*; если оно истинно, выдает выражение *f*.

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Ввести функцию $y = \begin{cases} x^2, \text{ если } |x| < 2 \\ 6 - |x|, \text{ если } |x| \ge 2 \end{cases}$ и построить ее график.

Решение.

Введите функцию $\mathbf{FUNC1}(x) := \mathrm{IF}(\mathrm{ABS}(x) < 2, x^2, 6 - \mathrm{ABS}(x))$.

Установите курсор поля алгебры на строку с этой функцией и постройте ее график как обычно.

Эту же функцию можно определить и так:

$$\mathbf{FUNC11}(x) := \mathrm{IF}(\mathrm{ABS}(x) \ge 2, 6 - \mathrm{ABS}(x), x^2).$$

***Замечание***. Знак ≥ вводится как >= .

Постройте график этой функции и убедитесь в том, что графики совпадают.

Можно построить таблицу значений этой функции, используя функцию **VECTOR**. Введите

**VECTOR(FUNC1**(*x*),*x*,–4,4) ↵ S ↵.

**Задача 2.** Ввести функцию $y = \begin{cases} 2 - \dfrac{x^2}{2}, \text{ если } -\dfrac{1}{2} \le x \le 1, \\ -\dfrac{x}{4}, \text{ если } x < -\dfrac{1}{2} \text{ или } x > 1 \end{cases}$

и построить ее график.

**Решение.**

Введите функцию

$$\mathbf{FUNC2}(x) := \mathbf{IF}\left(x \geq -\frac{1}{2}\mathrm{AND}x \leq 1, 2-\frac{x^2}{2}, -\frac{x}{4}\right).$$

Постройте ее график, при этом «выколите» точки, не принадлежащие графику, построив окружности с центрами в этих точках.

Эту же функцию можно определить и так:

$$\mathbf{FUNC21}(x) := \mathbf{IF}\left(x < -\frac{1}{2}\mathrm{OR}x > 1, -\frac{x}{4}, 2-\frac{x^2}{2}\right).$$

Построим несколько точек этого графика. Введите

$$\mathbf{VECTOR}([x, \mathbf{FUNC}2(x)], x, -3, 3) \ \text{↵}\ \mathrm{S}\ \text{↵}$$

Постройте полученные точки (рис. 92).

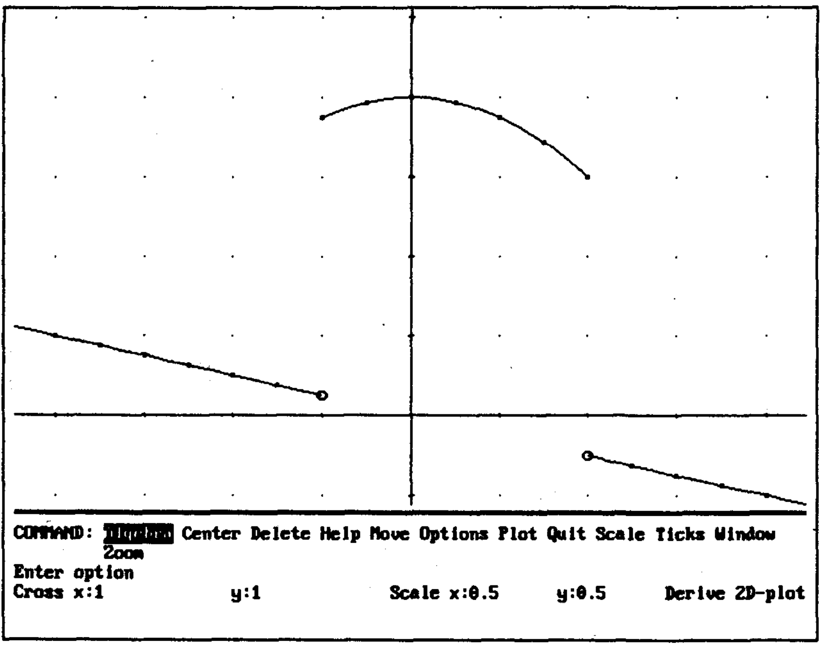



**Рис. 92**

В некоторых случаях при построении графика получается непрерывная линия, хотя функция имеет точку разрыва первого рода. Тогда можно уменьшить масштаб изображения или установить аккуратность 9, то есть Accuracy 9. Следующий пример демонстрирует это.

**Задача 3.** Ввести функцию $y = \begin{cases} 4 - x^2, \text{ если } -1 \le x \le 2, \\ x, \text{ если } x < -1 \text{ или } x > 2 \end{cases}$ и построить ее график.

Решение.

Введите $\mathbf{FUNC3}(x) := \mathbf{IF}(x \ge -1 \mathrm{AND} x \le 2, 4 - x^2, x)$ и постройте график функции. На рис. 93 изображены графики функций **FUNC2** и **FUNC3** при Accuracy 7. Можете построить несколько точек второго графика для большей наглядности.

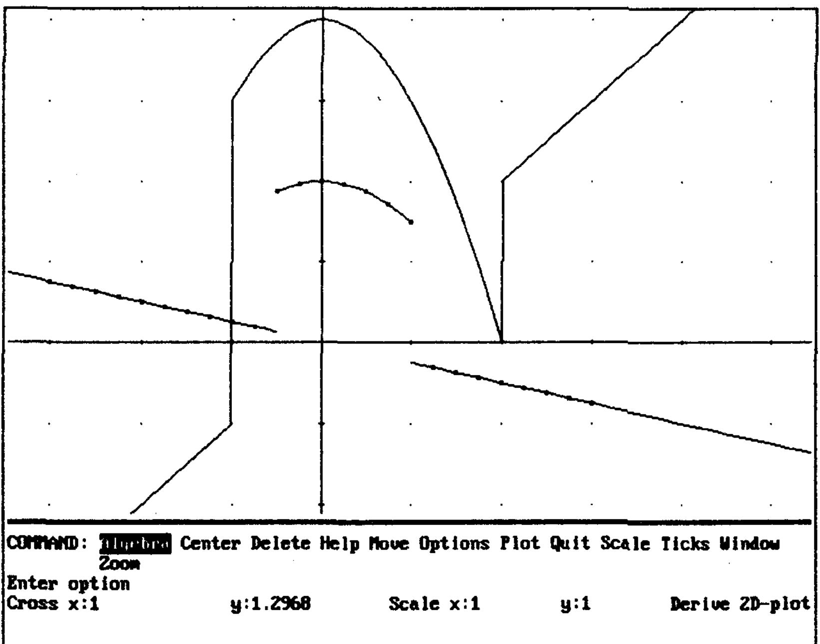



**Рис. 93**

Уменьшите масштаб и сравните изображения.

На рис. 94 при том же масштабе, что и на рис. 93, установлено Accuracy 9. Вы видите, что теперь получился нужный рисунок.

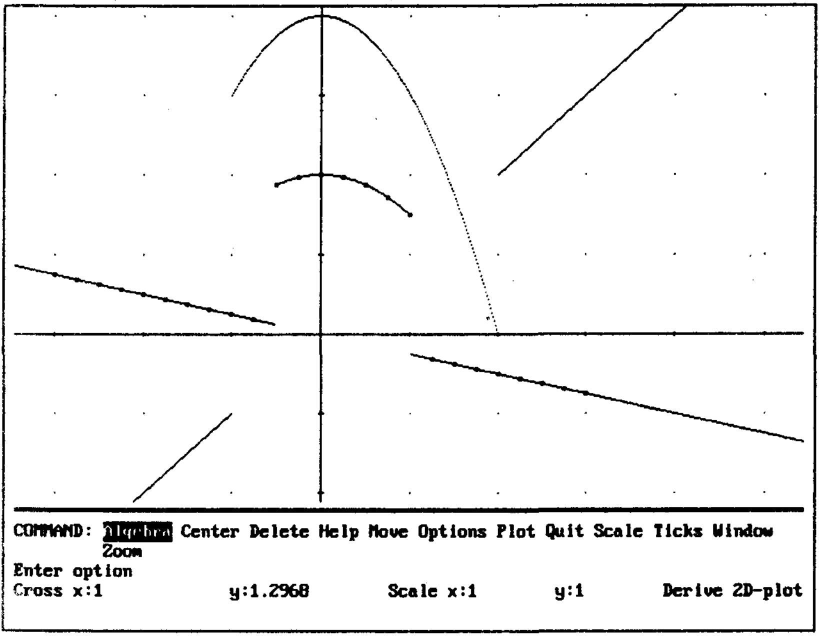



**Рис. 94**

**Задача 4.** Ввести функцию $y = \begin{cases} 1/x, \text{ если } x \geq 2, \\ x^2 + 1, \text{ если } 0 < x < 2, \\ x^2, \text{ если } x \leq 0 \end{cases}$

и построить ее график.

Р е ш е н и е.

Введите функцию $\mathbf{IF}(x \geq 2, x, \mathbf{IF}(x > 0, x^2 + 1, x^2))$ и постройте ее график. «Выколите» точки, не принадлежащие графику (рис. 95).

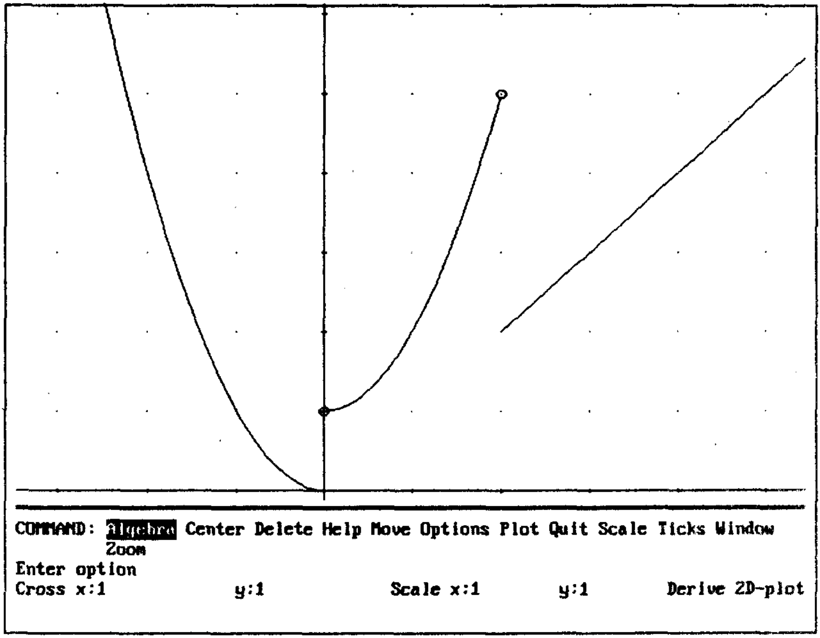



**Рис. 95**

Составьте несколько подобных примеров самостоятельно и решите их.

## ФУНКЦИИ ITERATE И ITERATES

**ITERATES** $(u, x, x_0)$ – выдает вектор $[x_0, u(x_0), u(u(x_0)), \ldots]$ до тех пор, пока элементы не начинают повторяться.

**ITERATES** $(u, x, x_0, n)$ – выдает первые $n + 1$ элементов вектора $[x_0, u(x_0), u(u(x_0)), \ldots]$.

**ITERATE** $(u, x, x_0)$ – выдает первый повторяющийся элемент в последовательности $x_0, u(x_0), u(u(x_0)), \ldots$

**ITERATE** $(u, x, x_0, n)$ – выдает $n + 1$-й элемент в последовательности $x_0, u(x_0), u(u(x_0)), \ldots$

**Задача 1.** Введите функцию

$$\boxed{\textbf{STEPENY}(x,n) := \text{ITERATES}(kx, k, 1, n)}$$

**STEPENY** (2, 5) ↵ S ↵. Результат: [1, 2, 4, 8, 16, 32].

**Задача 2.** Введите функцию

$$\boxed{\textbf{STEPEN}(x,n) := \text{ITERATE}(kx, k, 1, n)}$$

Введите **STEPEN**(2,5) ↵ S ↵. Результат: 32.
Сравните введенные функции и результаты работы с ними.

**Задача 3.** Введите функцию, находящую степени введенного числа с $m$-й по $n$-ю.

**Задача 4.** Дана последовательность $x_n = 3x_{n-1} + 2x_{n-2} + x_{n-3}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Введите функцию, определяющую $x_n$.

Р е ш е н и е.

Введем функцию

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{POSL\_PRIM}(n) := \text{ITERATES}([\text{ELEMENT}(v,2), \text{ELEMENT}(v,3),\\ \textbf{ELEMENT}(v,1) + 2\textbf{ELEMENT}(v,2) + 3\textbf{ELEMENT}(v,3)], v, [0,1,1], n-3)\end{array}}$$

1. Введем **POSL_PRIM**(4) ↵ S ↵. Результат: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Легко определить, что $x_4 = 5$.

Введем **POSL_PRIM**(6) ↵ S ↵.

Результат: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 18 \\ 5 & 18 & 65 \end{bmatrix} \Rightarrow x_6 = 65$.

Ясно, что для решения задачи нам надо выделить последнюю строку, а в ней – последний, то есть третий, элемент.

2. Введите вспомогательную функцию **POSL_VS** , отличающуюся от функции **POSL_PRIM** только тем, что вместо функции **ITERATES** будет функция **ITERATE**.

**POSL_VS**(6) ↵ S ↵. Результат: [5, 18, 65].

3. Введем функцию, решающую поставленную задачу.

| |
|---|
| **POSL**($n$):= **ELEMENT**(**POSL_VS**($n$),3) |

**POSL**(6) ↵ S ↵. Результат: 65.

**Задача 5.** Дана последовательность $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $x_0 = 1$, $x_2 = 1$. Эта последовательность задает так называемые числа Фибоначчи. Введите функцию, определяющую эти числа.

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

## Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида $P(x)\,\mathrm{d}x + Q(y)\,\mathrm{d}y = 0$ называется ***уравнением с разделенными переменными***. Общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$\int P(x)\,\mathrm{d}x + \int Q(y)\,\mathrm{d}y = C.$$

Уравнение вида $\varphi_1(x)\psi_1(y)\,\mathrm{d}x + \varphi_2(x)\psi_2(y)\,\mathrm{d}y = 0$ называется ***уравнением с разделяющимися переменными***. Путем деления уравнения на произведение $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ оно приводится к уравнению с разделенными переменными.

Введем функцию

| |
|---|
| **RAZD**$(p,q,x,y) = \int p\,\mathrm{d}x + \int q\,\mathrm{d}y = c$ |

Известно, что если уравнение $F(x,y)=0$ неявно определяет функцию $y=f(x)$, то $y'(x)=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$. Используем эту формулу для проверки результатов. Введем функции **PROV** и **PROV2**.

$$\boxed{\mathbf{PROV}(f,x,y):=-\frac{f'_x}{f'_y}}$$

$$\boxed{\mathbf{PROV2}(p,q,f,x,y):=-\frac{f'_x}{f'_y}+\frac{p}{q}}$$

Функция **PROV** определяет производную функции $f$. Функция **PROV2** находит разность между производной полученной функции $f$ и производной искомой функции. Производная искомой функции по условию равна $-\dfrac{p}{q}$.

## ЗАДАЧИ

Решите данные дифференциальные уравнения.

**Задача 1.** $e^{-y}(1+y')=1$.

Решение.

$y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, поэтому данное уравнение можно записать в виде $(e^{-y}-1)\mathrm{d}x+e^{-y}\mathrm{d}y=0$. Разделив переменные, получим $\mathrm{d}x-\dfrac{e^{-y}}{e^{-y}-1}\mathrm{d}y=0$ или $\mathrm{d}x-\dfrac{\mathrm{d}y}{e^{y}-1}=0$.

1. Решим полученное уравнение:

$\mathbf{RAZD}\left(1,\dfrac{-1}{\mathrm{EXP}(y)-1}\right)$ ↲ S ↲. Результат: $\ln\dfrac{1}{e^{y}-1}+x+y=c$.

Можно преобразовать полученный ответ:

$\mathbf{EXP}(\ln\dfrac{1}{e^{y}-1}+x+y)=c$ ↲ S ↲. Результат: $\dfrac{e^{x+y}}{e^{y}-1}=c$.

2. П р о в е р к а.

**PROV**$\left(\dfrac{e^{x+y}}{e^{y}-1}-c\right)$ ↲ S ↲. Результат: $e^{y}-1$. По условию $y'=e^{y}-1$. Следовательно, мы нашли верное решение.

Можно также проверить полученное решение при помощи функции **PROV2**.

**PROV2**$\left(e^{-y}-1, e^{-y}, \dfrac{e^{x+y}}{e^{-y}-1}\right)$ ↲ S ↲. Результат: 0, что и требовалось показать.

Ответ: $e^{x+y}=C(e^{y}-1)$.

**Задача 2.** $y'\sin x - y\cos x = 0$, $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$.

Р е ш е н и е.

Разделим переменные.

$$\frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x-\frac{\mathrm{d}y}{y}=0.$$

1. **RAZD**$(\cos x/\sin x, -1/y)$ ↲ S ↲.

Результат: $\ln\sin x-\ln y = c$.

2. Сделайте проверку.

3. Найдем значение $c$, соответствующее заданным начальным условиям. Подставим в полученное равенство $\dfrac{\pi}{2}$ вместо $x$ и 1 вместо $y$.

M S $x := \dfrac{\pi}{2}$, y: = 1 ↲. Результат: $c = 0$.

4. Подставим в полученное решение 0 вместо $c$ и полученное в результате равенство решим относительно $y$ (L ↲). Результат: $y=\sin x$.

Ответ: $y=\sin x$.

Остальные задачи решите самостоятельно.

**Задача 3.** $(1+y^2)\,\mathrm{d}x+(1+x^2)\,\mathrm{d}y=0$.

**Задача 4.** $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$.

**Задача 5.** Найти такую кривую, проходящую через точку (0,–2), чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, увеличенной в три раза.

## Однородные уравнения

Функция $f(x, y)$ называется ***однородной функцией своих аргументов измерения n***, если справедливо тождество $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$.

### Примеры

1. $f(x,y) = 5x^3 - 4xy^2$ есть однородная функция третьего измерения, так как $f(tx,ty) = t^3 f(x,y)$.

2. $f(x,y) = \dfrac{x^3 - 2y^3}{7x^3 + x^2 y}$ есть однородная функция нулевого измерения, так как $f(tx,ty) = \dfrac{t^3(x^3 - 2y^3)}{t^3(7x^3 + x^2 y)} = \dfrac{x^3 - 2y^3}{7x^3 + x^2 y} = f(x,y)$.

Если вы можете это сделать, «на глаз» определяйте, является ли данная функция однородной. Введем функцию для определения этого.

$$\boxed{\textbf{TEST\_ODN1}(p,x,y,t) := \frac{1}{p}\lim_{y\to yt}\lim_{x\to xt} p}$$

Функция $p$ является однородной, если в результате применения функции **TEST_ODN1**$(p, x, y, t)$ получим $t^n$, $n$ — порядок однородности. Иначе функция $p$ не является однородной.

Выяснить, является ли данная функция однородной.

**Задача 1.** $x^3 y - 4xy^3$.

Решение.

**TEST_ODN1**$(x^3 y - 4xy^3)$ ↵ S ↵. Результат: $t^4$.

Ответ: данная функция является однородной четвертого порядка.

**Задача 2.** $x^2 y^3 - 4xy^2$.

**Задача 3.** $x \sin\dfrac{x}{y} - 2y\cos\dfrac{y}{x}$.

Функция, определяющая порядок однородности, приводится в теме «Уравнения Дарбу».

Дифференциальное уравнение вида $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ (1) называется ***однородным*** относительно $x$ и $y$, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются однородными функциями одного измерения своих аргументов $x$ и $y$.

Определить, является ли уравнение однородным очень легко «на глаз». Можно для проверки этого ввести функцию, назовем ее **TEST_ODN**.

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{TEST\_ODN}(p,q,x,y,t):=\\ \mathrm{TEST\_ODN1}(p,x,y,t)-\mathrm{TEST\_ODN1}(q,x,y,t)\end{array}}$$

Если результатом будет нуль, функция является однородной, иначе – не является однородной.

## Примеры

Определить, является ли данное уравнение однородным.

**Пример 1.** $x^2y^3\,\mathrm{d}x + (x^5 + xy^4)\,\mathrm{d}y = 0$.
Решение.

**TEST_ODN**$(x^2y^3, x^5 + xy^4)$ ↲ S ↲. Результат: 0.
Ответ: данное уравнение является однородным.

**Пример 2.** $x^2y^3\,\mathrm{d}x + (x^5 + xy)\,\mathrm{d}y = 0$.
Решение.

**TEST_ODN**$(x^2y^3, x^5 + xy)$ ↲ S ↲.
Результат: выражение, содержащее переменные $x$ и $y$.
Ответ: данное уравнение не является однородным.

В следующем подразделе приведена еще одна функция, с помощью которой можно определить, является ли данное уравнение однородным.

Введем новую искомую функцию $u = \dfrac{y}{x}$. Тогда уравнение (1) приведется к уравнению с разделяющимися переменными:

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi(u) - u.$$

Введем функции

$$\boxed{\mathbf{ODN}(p,q,x,y) := \lim_{y\to y/x} \mathrm{RAZD}\left[\frac{1}{x}, \lim_{x\to 1}\frac{q}{p+qy}, x, y\right]}$$

*Замечание.* Функция приведена в том виде, в каком вы ее увидите на экране. При вводе используются круглые скобки.

**RAZ**$(p, q, x, y)$ как **RAZD**$(p, q, x, y)$ но без $C$ в правой части, **ODN**$1(p, q, x, y)$ — как **ODN**$(p, q, x, y)$, только вместо **RAZD** должно быть **RAZ**.

$$\boxed{\mathbf{ODN2}(p,q,x,y) := \mathbf{EXP}(\mathbf{ODN1}(p,q,x,y)) = c}$$

$$\boxed{\mathbf{ODNOR3}(p,q,x,y) := \mathbf{EXP}(\mathbf{ODN1}(p,q,x,y))^2 = c}$$

Какую из этих трех функций лучше использовать можно определить методом проб.

## ЗАДАЧИ

Решите данные уравнения.

**Задача 1.** $x^2 \mathrm{d}y = (y^2 - xy + x^2)\mathrm{d}x$.

1. Очевидно, это уравнение является однородным. Можно убедиться в этом при помощи функции **TEST_ODN**.

2. **ODN**$(y^2 - xy + x^2, -x^2)$ ↵ S ↵. Результат: $\ln x - \dfrac{x}{x-y} = c$.

3. Проверка.

**PROV2**$\left(y^2 - xy + x^2, -x^2, \ln x - \dfrac{x}{x-y} - c\right)$ ↵ S ↵. Результат: 0.

Ответ: $\ln x - \dfrac{x}{x-y} = C$. Можно решить полученное уравнение относительно $y$.

**Задача 2.** $xy' - y = x\cos^2\dfrac{y}{x}$, $y(3) = 0$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $\left(y + x\cos^2\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$.

1. Убедитесь в том, что это уравнение однородное.

2. **ODN2**$(y + \cos(y/x)\text{^}2, -x)$ ↵ S ↵. Результат: $xe^{-\mathrm{tg}\frac{y}{x}} = c$.

3. Сделайте проверку.

4. Найдите значение $c$, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

M S ↵ x: = 3 ↵ y: = 0 ↵. Результат: $c = 3$.

Ответ: $xe^{-\mathrm{tg}\frac{y}{x}} = 3$.

**Задача 3.** $(xy' - y)\sin\dfrac{y}{x} = x.$

Р е ш е н и е.

Перепишем уравнение в виде $\left(y\sin\dfrac{y}{x} + x\right)\mathrm{d}x - x\sin\dfrac{y}{x}\mathrm{d}y = 0.$ Убедитесь в том, что это уравнение однородное. Решите уравнение двумя способами: используя функцию **ODN** и функцию **ODN2.**

**Задача 4.** $(4x - 3y)\,\mathrm{d}x + (2y - 3x)\,\mathrm{d}y = 0.$

Р е ш е н и е.

1. Убедитесь в том, что это однородное уравнение.
2. **ODNOR3**$(4x - 3y, 2y - 3x)$ ↵ S ↵ F ↵.

Результат: $(x - y)(2x - y) = c.$

3. Сделайте проверку.

Ответ: $(x - y)(2x - y) = C.$

Остальные задачи решите самостоятельно.

**Задача 5.** $(x - y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0.$

**Задача 6.** $xy' = y(\ln x - \ln y).$

**Задача 7.** $(xy + y^2)\,\mathrm{d}x - (2x^2 + xy)\,\mathrm{d}y = 0.$

**Задача 8.** $(y - x)\,\mathrm{d}x + (y + x)\,\mathrm{d}y = 0.$

## Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными и к однородным уравнениям

Пусть дано уравнение $(ax + by + c)\,\mathrm{d}x + (dx + my + n)\,\mathrm{d}y = 0.$ (1)

Введем обозначение $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ d & m \end{vmatrix}.$

*1-й случай.* Пусть $\Delta = 0$. Сделаем замену $dx + my + n = z$, тогда уравнение (1) приведется к виду $\mathrm{d}x + \dfrac{z}{m\left(\dfrac{a}{d}(z - n) + c\right) - dz}\mathrm{d}z = 0.$

Проделайте выкладки самостоятельно. Это уравнение с разделенными переменными.

Введем функции

$$\mathbf{TEST\_PRIV\_ODN}(a,b,c,d) := \mathrm{DET}\begin{bmatrix} ab \\ cd \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{PR1\_ODN}(a,b,c,d,m,n,x,y) :=$$

$$\lim_{z \to dx+my+n} \mathrm{RAZD}\left[1, \frac{z}{m\left[\frac{a}{d}(z-n)+c\right]-dz}, x, z\right]$$

Решите данное дифференциальное уравнение.

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** $8x+4y+1+(4x+2y+1)y' = 0.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$(8x+4y+1)\,\mathrm{d}x+(4x+2y+1)\,\mathrm{d}y = 0.$$

1. Выясним, к какому из двух типов принадлежит это уравнение. Видно, что $\Delta = 0$. Можно это проверить при помощи функции TEST_PRIV_ODN.

**TEST_PRIV_ODN**(8,4,4,2) ↵ S ↵. Результат: 0.

2. Проинтегрируем уравнение.

PR1_ODN(8,4,1,4,2,1) ↵ S ↵

Результат: $-\dfrac{16x^2+4x(4y+1)+4y^2+4y+1}{4} = c \Rightarrow$

$\Rightarrow 16x^2+16xy+4x+4y^2+4y = c.$

3. Сделаем проверку.

**PROV**2$(8x+4y+1,4x+2y+1,16x^2+16xy+4x+4y^2+4y-c)$ ↵ S ↵

Результат: 0. Следовательно, получили верный ответ.

Полученное решение можно переписать в виде

$$(4x+2y+1)^2 = 4x+c.$$

Ответ: $(4x+2y+1)^2 = 4x+C.$

*2-й случай.* Пусть $\Delta \neq 0$. Тогда уравнение приводится к однородному уравнению с помощью замены переменных $x = \frac{bn - cm}{am - bd}$, $y = \frac{cd - an}{am - bd}$. Проделайте выкладки самостоятельно.

Введем функцию

$$\mathbf{PR2\_ODN}(a,b,c,d,m,n,x,y) := \lim_{y \to y - \frac{cd-an}{am-bd}} \ \lim_{x \to x - \frac{bn-cm}{am-bd}} \mathbf{ODN}(ax + by, xd + my, x, y)$$

а также функции **PR2_ODN2** и **PR2_ODN3**, заменив в функции **PR_ODN** функцию **ODN** соответственно на функции **ODN2** и **ODNOR3**.

**Задача 2.** Решите данные уравнения (2—10).

$x - y - 2 + (1 - x)y' = 0.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде $(x - y - 2)\,\mathrm{d}x + (1 - x)\,\mathrm{d}y = 0$. Очевидно, $\Delta \neq 0$ (можно это проверить при помощи функции **TEST_PRIV_ODN**). Поэтому воспользуемся одной из функций **PR2_ODN**.

**PR2_ODN2**(1,1,–2,–1,0,1) ↵ S ↵.

Результат: $\ln(x - 1) + \frac{1 - y}{x - 1} = c$.

Сделайте проверку полученного результата.

Ответ: $\ln(x - 1) + \frac{1 - y}{x - 1} = C$. Можно из этого равенства выразить $y$.

**Задача 3.** $(x + y - 2)\,\mathrm{d}x + (x - y + 4)\,\mathrm{d}y = 0.$

Решение.

1. $\Delta \neq 0$.

**PR2_ODN3**(1,1,–2,1,–1,4) ↵ S ↵.

Результат: $-x^2 - 2xy + 4x + y^2 - 8y + 14 = c \Rightarrow$

$\Rightarrow -x^2 - 2xy + 4x + y^2 - 8y = c$.

2. Сделайте проверку.

Ответ: $-x^2 - 2xy + 4x + y^2 - 8y = C$.

**Задача 4.** $(x+y-2)\,dx+(x-y+4)\,dy=0.$

**Задача 5.** $(x+y+1)\,dx+(2x+2y-1)\,dy=0.$

**Задача 6.** $2x+3y-5+(3x+2y-5)y'=0.$

**Задача 7.** $(2x+y+1)\,dx+(2x+2y-1)\,dy=0.$

**Задача 8.** $(2x+y+1)\,dx-(4x+2y-3)\,dy=0.$

**Задача 9.** $(x+y)\,dx+(x-y-2)\,dy=0.$

**Задача 10.** $x-y-1+(y-x+2)y'=0.$

Иногда уравнение можно привести к однородному заменой переменного $y=z^a$.

Введем функции

$$\boxed{\mathbf{FORMA}(p,q,x,y):=\frac{p}{q}}$$

$$\boxed{\mathbf{TEST2\_ODN}(p,q,x,y):=\frac{\mathrm{FORMA}\left(\lim\limits_{y\to yt}\lim\limits_{x\to xt}p,\lim\limits_{y\to yt}\lim\limits_{x\to xt}q,x,y\right)}{\mathrm{FORMA}(p,q,x,y)}}$$

$$\boxed{\mathbf{TEST\_PR3}\_\mathrm{ODN}(p,q,x,y):=\mathrm{TEST2\_ODN}\left[\lim_{y\to z^m}p,z^{m-1}\lim_{y\to z^m}q,x,z\right]}$$

$$\boxed{\mathbf{PR3\_ODN1}(p,q,m,x,y):=\lim_{z\to y^{1/m}}\mathrm{ODN}\left[\lim_{y\to z^m}p,z^{m-1}m\lim_{y\to z^m}q,x,z\right]}$$

Аналогично можно ввести функцию **PR3_ODN2**, отличающуюся тем, что вместо функции **ODN** в ней используется функция **ODN2**.

С помощью функции **TEST2_ODN** можно определить, являются ли данные функции однородными одного порядка, иначе, является ли данное уравнение однородным, результат должен быть 1. Приведите примеры самостоятельно.

**Задача 11.** Решите данное уравнение.

$$(x^2y^2-1)dy+2xy^3dx=0.$$

Р е ш е н и е.

1. Проверим, можно ли данное уравнение привести к однородному. Установите ME Expand.

**TEST_PR3_ODN**$(2xy^3, x^2y^2-1)$ ↵ S ↵. F Trivial.

Результат: $\dfrac{t^2(x^2z^{2m}-1)(tz)^{2m}}{(x^2t^2(tz)^{2m}-1)z^{2m}}$.

Наша задача – определить $m$, при котором числитель и знаменатель будут однородными функциями. По числителю видно, что должно выполняться равенство $-2m = 2$, следовательно, $m = -1$. Подставим в полученное выражение $m = -1$:

M S ↵ $m$: $=-1$ ↵ $x$ ↵ $t$ ↵ $z$ ↵,

получим 1. Следовательно, при $m = -1$ данное уравнение будет однородным, то есть замена $y = z^{-1}$.

2. Решим уравнение.

**PR3_ODN2**$(2xy^3, x^2y^2-1,-1)$ ↵ S ↵ E ↵.

Результат: $x^2|y| + \dfrac{1}{|y|} = c$.

3. Сделаем проверку.

**PROV2**$\left(2xy^3, x^2y^2-1, x^2|y| + \dfrac{1}{|y|} - c\right)$ ↵ S ↵. Результат: 0.

Ответ: $x^2y + \dfrac{1}{y} = C$.

**Задача 12.** $2xy'(x-y^2)+y^3=0$.

Р е ш е н и е.

Перепишем уравнение в виде $y^3\,\mathrm{d}x + 2x(x-y^3)\,\mathrm{d}y = 0$.

1. Убедитесь в том, что $m = \dfrac{1}{2}$.

2. **PR3_ODN2**$\left(y^3, 2x(x-y^2), \dfrac{1}{2}\right)$ ↵ S ↵ (MT Collect).

Результат: $y^2 e^{-\frac{y^2}{x}} = c$.

3. Сделайте проверку.

Ответ: $y^2 = Ce^{\frac{y^2}{x}}$.

**Задача 13.** $4y^6 + x^3 = 6xy^5 y'$.

Р е ш е н и е.

Установите ME Expand.

1. **TEST_PR3_ODN**$(4y^6 + x^3, -6xy^5)$ ↲ S ↲. ME Collect S ↲.

Результат: $\dfrac{z^{6m}(t^3x^3(tz)^{-6m}+4)}{4z^{6m}+x^3}$.

Видим, что должно выполняться равенство $3 - 6m = 0$. Подставив в полученное выражение $m = \dfrac{1}{2}$, получаем 1.

Решите уравнение и сделайте проверку.

Ответ: $\dfrac{x^4}{x^3 + y^6} = C$.

**Задача 14.** $(x + y^3)\,\mathrm{d}x + 3(y^3 - x)y^2\,\mathrm{d}y = 0$. Ответ: $m = \dfrac{1}{3}$.

**Задача 15.** $(6 - x^2y^2)\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$. Ответ: $m = -1$.

**Задача 16.** $(x + y^3)\,\mathrm{d}x + 3(y^3 - x)y^2\,\mathrm{d}y = 0$. Ответ: $m = \dfrac{1}{3}$.

**Задача 17.** $(6 - x^2y^2)\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$. Ответ: $m = -1$.

*Замечание*. При проверке установите **Manage Branch Any**.

## Линейные уравнения

***Линейным дифференциальным уравнением первого порядка*** называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной. Оно имеет вид: $y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ — заданные функции от $x$, непрерывные в той области, в которой требуется проинтегрировать уравнение.

Решение линейного уравнения происходит следующим образом:

$$y = \left(C + \int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Введем функцию, определяющую решение линейного уравнения:

$$\mathbf{LIN1}(p,q,x,y) := y = \left[c + \int q e^{\int p \, dx} \, dx\right] e^{-\int p \, dx}$$

Эту функцию можно ввести также, используя функцию EXP, — тогда на экране функция **LIN1** будет отображаться следующим образом:

$$\mathbf{LIN1}(p,q,x,y) := y = (c + \int q \mathbf{EXP}(\int p \, dx) \, dx \mathbf{EXP}(-\int p \, dx))$$

Для распечатки на бумаге удобнее второй вариант. В дальнейшем функции будут введены только в одном из этих видов, вы можете вводить функцию в любом варианте.

Для проверки результата введем функцию

$$\mathbf{PROV\_LIN1}(p,q,f,x,y) := \frac{d}{dx} f + pf - q$$

Здесь $y = f(x)$ – найденное решение.

## ЗАДАЧИ

Решите данные уравнения.

**Задача 1.** $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.

Решение.

1. **LIN1**$(-2x, 2x\mathbf{EXP}(x^2))$ ↵ S ↵. Результат: $y = (x^2 + c)e^{x^2}$.
2. Сделаем проверку.

**PROV_LIN1**$(-2x, 2x\mathbf{EXP}(x^2), (x + c)\mathbf{EXP}(x^2))$ ↵ S ↵.
Результат: 0.

Ответ: $y = (x^2 + C)e^{x^2}$.

**Задача 2.** $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$.

Решение.

1. Известно, что $y' = \dfrac{1}{x'}$, поэтому данное уравнение можно переписать в виде $x' + \dfrac{1}{y}x = 2\ln y + 1$. Это – линейное уравнение относительно функции $x = x(y)$.

2. Решим полученное уравнение. Мы должны учесть, что $x = x(y)$, то есть что переменные $x$ и $y$ поменялись ролями.

**LIN1**$(1/y, 2\ln(y)+1, y, x)$ ↵ S ↵. Результат: $x = y\ln y + \dfrac{c}{y}$.

3. Сделаем проверку.

**PROV_LIN1**$(1/y, 2\ln y + 1, y\ln y + c/y, y, x)$ ↵ S ↵.

Результат: 0.

Ответ: $x = y\ln y + \dfrac{C}{y}$.

Остальные задачи решите самостоятельно.

**Задача 3.** $y'\cos x - y\sin x = 2x$, $y|_{x=0} = 0$.

**Задача 4.** $y'x\ln x - y = 3x^3\ln x$.

**Задача 5.** $(2x + y)\,\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x + 4\ln y\,\mathrm{d}y$.

## Уравнения Бернулли

Уравнение Бернулли имеет вид $y' + p(x)y = q(x)y^m$, где $m \neq 0$, $m \neq 1$. (При $m = 0$ и при $m = 1$ это уравнение является линейным.)

С помощью замены переменной $z = \dfrac{1}{y^{m-1}}$ уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению и интегрируется как линейное.

Введем функцию

**BERN**$(p, q, m, x, y) :=$ **LIN1**$((1-m)p, (1-m)q, x, y^{1-m})$

Для проверки полученного результата введем функцию

$$\boxed{\mathbf{PROV\_BERN}(p,q,k,f,x,y) := \frac{d}{dx}f + pf - qf^k}$$

## ЗАДАЧИ

Решите данные уравнения.

**Задача 1.** $3xy^2y' - 2y^3 = x^3$.

Р е ш е н и е.

Перепишем данное уравнение в виде $y' - \dfrac{2}{3x}y = \dfrac{x^2}{3y^2}$.

Это уравнение является уравнением Бернулли, $m = -2$.

1. Решим уравнение.

$\mathbf{BERN}\left(-\dfrac{2}{3x}, \dfrac{x^2}{3}, -2\right)$ ↲ S ↲. Результат: $y^3 = x^2(x + c)$.

2. Сделайте проверку (вместо $f$ надо ввести найденное выражение $y(x)$).

Ответ: $y^3 = x^2(x + C)$.

**Задача 2.** $2y'\ln x + \dfrac{y}{x} = y^{-1}\cos x$.

Р е ш е н и е.

Перепишем уравнение в виде $y' + \dfrac{1}{2x\ln x}y = \dfrac{\cos x}{2\ln x}y^{-1}$. Это уравнение является уравнением Бернулли, $m = -1$.

Продолжите решение задачи самостоятельно.

Ответ: $y^2 = \dfrac{\sin x + C}{\ln x}$.

**Задача 3.** $(x^2 + y^2 + 1)dy + xy\,dx = 0$.

Р е ш е н и е.

Пользуясь тем, что $y' = \dfrac{1}{x'}$, перепишем данное уравнение в виде $x' + \dfrac{1}{y}x = -\left(y + \dfrac{1}{y}\right)x^{-1}$. Это уравнение является уравнением Бернулли относительно функции $x = x(y)$, $m = -1$.

1. Решим полученное уравнение, учитывая то, что переменные $x$ и $y$ поменялись ролями.

$$\mathbf{BERN}\left(\frac{1}{y},-\left(y+\frac{1}{y}\right),-1,y,x\right) \hookleftarrow \mathrm{S} \hookleftarrow.$$

Результат: $x^2 = -\dfrac{y^4+2y^2-2c}{2y^2}$.

2. Сделайте проверку.

Ответ: $2x^2y^2 + y^4 + 2y^2 = C$.

**Задача 4.** $y' + 2xy = 2xy^2$.

**Задача 5.** $y' + 2xy = y^2e^{x^2}$.

**Задача 6.** $2y'\ln x = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\cos x}{y}$.

**Задача 7.** $y' - y\cos x = y^2\cos x$.

## Уравнения в полных дифференциалах

Дифференциальное уравнение вида $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$ называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть представляет полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, т.е. $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y$.

Критерием полного дифференциала является равенство $P'_y = Q'_x$, иначе $P'_y - Q'_x = 0$.

Уравнение в полных дифференциалах можно решить различными способами.

*1-й способ.* Решение уравнения можно искать в виде

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,\mathrm{d}y = C,$$

где $(x_0;y_0)$ – любая точка, в которой функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны.

Введем функции

$$\boxed{\mathbf{TEST\_POL\_DIF}(p,q,x,y) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}p - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}q}$$

Это функция-тест для проверки, является ли данное уравнение уравнением в полных дифференциалах.

> ***Замечание.*** Выражение в правой части функции приведено в том виде, в каком вы его увидите на экране.

Функция **UR_POL1** определяет решение уравнения в полных дифференциалах (в соответствии с приведенной формулой).

$$\boxed{\mathbf{UR\_POL1}(p,q,u,v,x,y) := \int_u^x p\,\mathrm{d}x + \int_v^y \lim_{x\to v} q\,\mathrm{d}y = c}$$

Здесь $u$ и $v$ – соответственно $x_0$ и $y_0$.

*2-й способ* основан на том, что $u'_x = P(x,y)$, $u'_y = Q(x,y)$.

$$u'_x = P(x,y) \Rightarrow u(x,y) = \int P(x,y)\,\mathrm{d}x + \varphi(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\int P(x,y)\,\mathrm{d}x + \varphi(y)\right)'\Big|_y = Q(x,y).$$

Введем функции

$$\boxed{\mathbf{D1\_P}(p,q,x,y) := \int p\,\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{\mathbf{D2\_P}(p,q,x,y) := \mathrm{D1\_P}(p,q,x,y) - \int q\,\mathrm{d}y}$$

$$\boxed{\mathbf{D3\_P}(p,q,x,y) := \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\mathrm{D2\_P}(p,q,x,y)\,\mathrm{d}y}$$

$$\boxed{\mathbf{UR\_POL}(p,q,x,y) := \mathrm{D1\_P}(p,q,x,y) - \mathrm{D3\_P}(p,q,x,y) = c}$$

> ***Замечание.*** Выражение в правой части функции **D3_P** приведено в том виде, в каком вы его увидите на экране.

Функции **D1_P**, **D2_P**, **D3_P** – вспомогательные. Функция **UR_POL** определяет решение уравнения в полных дифференциалах в соответствии с разобранным методом.

## Примеры

Решите данные уравнения.

**Пример 1.** $(3x^2+6xy^2)\,dx+(6x^2y+4y^3)\,dy=0.$

Решение.

1. Выясним, является ли данное уравнение уравнением в полных дифференциалах.

**TEST_POL_DIF**$(3x^2+6xy^2, 6x^2y+4y^3)$ ↲ S ↲. Результат: 0. Да, данное уравнение – уравнение в полных дифференциалах.

2. Решим его.

**UR_POL**$(3x^2+6xy^2, 6x^2y+4y^3)$ ↲ S ↲.

Результат: $x^3+3x^2y^2+y^4=c$.

Решим теперь это уравнение, используя функцию **UR_POL1**. Обе функции определены и непрерывны при любых $x$ и $y$, поэтому в качестве точки $(x_0, y_0)$ можно взять любую точку. Возьмем точку (0; 0).

**UR_POL1**$(3x^2+6xy^2, 6x^2y+4y^3, 0, 0)$ ↲ S ↲.

Результат: $x^3+3x^2y^2+y^4=c$.

Мы видим, что результаты совпали.

3. Сделаем проверку.

**PROV2**$(3x^2+6xy^2, 6x^2y+4y^3, x^3+3x^2y^2+y^4-c)$ ↲ S ↲.

Результат: 0.

**Пример 2.** $\dfrac{2x\,dx}{y^3}+\dfrac{(y^2-3x^2)\,dy}{y^4}=0,\ y(1)=1.$

Решение.

1. Убедитесь в том, что данное уравнение – уравнение в полных дифференциалах.

2. Решим уравнение.

**UR_POL**$(2x/y^3, (y^2-3x^2)/y^4)$ ↲ S ↲.

Результат: $\dfrac{x^2}{y^3}-\dfrac{1}{y}=c$.

3. Сделайте проверку.

4. Найдем $c$, соответствующее заданным начальным условиям. Подставим в найденное равенство $x=1$, $y=1$.

**M S** ↲ x: = 1 ↲ y: = 1 ↲. Результат: $c=0$.

Подставив в полученное решение уравнения $c=0$, получаем $x^2=y^2$. Из двух полученных равенств $x=y$ и $x=-y$

оставляем одно $x=y$, так как прямая $x=-y$ не проходит через точку (1; 1).

Ответ: $x=y$.

Остальные задачи решите самостоятельно.

**Пример 3.** $(2xy-3)\mathrm{d}x+(x^2+1)\mathrm{d}y=0.$

**Пример 4.** $(3x^2-2x-y)\mathrm{d}x+(2y-x+3y^2)\mathrm{d}y=0.$

**Пример 5.** $(3x^2y+y^3)\mathrm{d}x+(x^3+3xy^2)\mathrm{d}y=0.$

**Пример 6.** $\left(2x+\dfrac{x^2+y^2}{x^2y}\right)\mathrm{d}\,x=\dfrac{x^2+y^2}{xy^2}\mathrm{d}\,y.$

## Интегрирующий множитель. Нахождение интегрирующего множителя $\mu(x)$, $\mu(y)$

В некоторых случаях, когда уравнение

$$P(x,y)\,\mathrm{d}\,x+Q(x,y)\,\mathrm{d}\,y=0 \tag{1}$$

не является уравнением в полных дифференциалах, удается подобрать функцию $\mu=\mu(x,y)$, после умножения на которую левая часть (1) превращается в полный дифференциал $\mathrm{d}u=\mu M\mathrm{d}x+\mu N\mathrm{d}y$. Такая функция $\mu=\mu(x,y)$ называется ***интегрирующим множителем.*** Из определения интегрирующего множителя имеем:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu N),\ \text{или}\quad N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right),$$

откуда $N\dfrac{\partial\ln\mu}{\partial x}-M\dfrac{\partial\ln\mu}{\partial y}=\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}$ (2)

Мы получили уравнение в частных производных для нахождения интегрирующего множителя.

В некоторых случаях интегрирующий множитель удается найти сравнительно легко.

1. Если $\mu=\mu(x)$, то $\dfrac{\partial\mu}{\partial y}=0$ и уравнение (2) примет вид:

$$\frac{\mathrm{d}\ln\mu}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} \tag{3}$$

Для существования интегрирующего множителя, не зависящего от $y$, необходимо и достаточно, чтобы правая часть (3) была функцией только $x$. В таком случае $\ln\mu$ найдется квадратурой.

2. Аналогично, если $\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{1}{M}$ есть функция только $y$, уравнение (1) имеет интегрирующий множитель $\mu=\mu(y)$, зависящий только от $y$.

Введем функции

$$\mathbf{TEST\_IX}(p,q,x,y):=\frac{p'_y-q'_x}{q}$$

Эта функция — тест для определения, имеет ли данное уравнение интегрирующий множитель $\mu(x)$.

$$\mathbf{TEST\_IY}(p,q,x,y):=\frac{q'_x-p'_y}{p}$$

Эта функция — тест для определения, имеет ли данное уравнение интегрирующий множитель $\mu(y)$.

*1-й вариант.*

Введем функции

$$\mathbf{INU\_POLX}(p,q,x,y):=$$
$$\mathbf{UR\_POL}\left(pe^{\int \mathrm{TEST\_IX}(p,q,x,y)\mathrm{d}x},qe^{\int \mathrm{TEST\_IX}(p,q,x,y)\mathrm{d}x},x,y\right)$$

$$\mathbf{INU\_POLY}(p,q,x,y):=$$
$$\mathbf{UR\_POL}\left(pe^{\int \mathrm{TEST\_IY}(p,q,x,y)\mathrm{d}y},qe^{\int \mathrm{TEST\_IY}(p,q,x,y)\mathrm{d}y},x,y\right)$$

*2-й вариант.* Можно ввести функции для обозначения интегрирующих множителей и благодаря этому функции **INU_POL** станут короче и будут легче восприниматься. К тому же появляется возможность узнать, каков интегрирующий множитель. Правда, приходится вводить на две функции больше.

Введем функции

$$\mathbf{MU\_X}(p,q,x,y) := e^{\int \mathrm{TEST\_IX}(p,q,x,y)\,\mathrm{d}x}$$

Эта функция определяет интегрирующий множитель $\mu(x)$, если он существует.

$$\mathbf{INU\_POLX2}(p,q,x,y) :=$$
$$\mathbf{UR\_POL}\,(\mathbf{MU\_X}(p,q,x,y)\,p, \mathbf{MU\_X}(p,q,x,y)\,q, x, y)$$

Введите функцию **MU_Y** и второй вариант функции **INU_POLY** самостоятельно.

> ***Замечание.*** Если вы хотите ввести обе функции **INU_POLX**, например, собираетесь сравнить время решения задачи, добавьте к имени во втором варианте, например, _V.

## ЗАДАЧИ

Решите уравнения.

**Задача 1.** $y\,\mathrm{d}x + x(\ln x - y^3)\,\mathrm{d}y = 0.$

Решение.

1. Проверим, является ли данное уравнение уравнением в полных дифференциалах.

**TEST_POL_DIF**$(y, x(\ln x - y^3))$ ↵ S ↵. Результат: не равен тождественно нулю. Следовательно, данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах.

2. Проверим, имеет ли уравнение интегрирующий множитель, зависящий от одной переменной $x$.

**TEST_IX**$(y, x(\ln x - y^3))$ ↵ S ↵. Результат: $-\dfrac{1}{x}$.

Получили функцию одной переменной $x$, следовательно, существует интегрирующий множитель $\mu = \mu(x)$.

3. Решим данное уравнение, используя функцию **INU_POLX** или **INU_POLX2**:

**INU_POLX**$(y, x(\ln x - y^3))$ ↵ S ↵. Результат: $y\ln x - \dfrac{y^4}{4} = c$.

Решите уравнение, используя функцию **INU_POLX2**.

4. Сделайте проверку.

Ответ: $y\ln x - \dfrac{y^4}{4} = C$.

**Задача 2.** $4xy\,\mathrm{d}x + (y^3 + 4x^2)\,\mathrm{d}y = 0$.

Решение.

1. Убедитесь в том, что уравнение не является уравнением в полных дифференциалах.

2. Выясним, существует ли интегрирующий множитель, зависящий только от $x$.

**TEST_IX**$(4xy, y^3 + 4x^2)$ ↵ S ↵. Результат: $-\dfrac{4x}{4x^2 + y^3}$.

Полученное выражение зависит от обеих переменных $x$ и $y$, следовательно, нет интегрирующего множителя, зависящего только от $x$.

3. Выясним, существует ли интегрирующий множитель, зависящий только от $y$.

**TEST_IY**$(4xy, y^3 + 4x^2)$ ↵ S ↵. Результат: $\dfrac{1}{y}$.

Следовательно, есть интегрирующий множитель, зависящий только от переменной $y$, поэтому для решения уравнения надо использовать функцию **UNI_POLY** или **UNI_POLY2**.

**UNI_POLY**$(4xy, y^3 + 4x^2)$ ↵ S ↵.

Результат: $2x^2y^2 + \dfrac{y^5}{5} = c$.

Решите уравнение также при помощи функции **UNI_POLY2**.

4. Сделайте проверку.

Ответ: $10x^2y^2 + y^5 = C$.

**Задача 3.** $\cos y \mathrm{d}x + (\sin y + e^x)\mathrm{d}y = 0$.

> ***Замечание.*** При проверке решения данного уравнения установите **Manage Exponential Expand**.

**Задача 4.** $(2xy^2 - 3y^3)\mathrm{d}x + (7 - 3xy^2)\mathrm{d}y = 0.$

**Задача 5.** $(1 - x^2y)\mathrm{d}x + x^2(y - x)\mathrm{d}y = 0.$

**Задача 6.** $(x^2 + y)\mathrm{d}x - 2xy\,\mathrm{d}y = 0.$

**Задача 7.** $(x^2 + y^2 + 1)\mathrm{d}x - 2xy\mathrm{d}y = 0.$

**Задача 8.** $(3x + y^2)\mathrm{d}x - 2xy = 0.$

**Задача 9.** $2y\mathrm{d}x + (x + 7y^3)\mathrm{d}y = 0.$

**Задача 10.** $(x\sin y + y\cos y)\mathrm{d}x + (x\cos y - y\sin y)\mathrm{d}y = 0.$

## Нахождение интегрирующего множителя $\mu(x, y)$

Пусть $\mu = f^k$, где $f = f(x, y)$ $k$ – некоторое число. Тогда:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}f} = \frac{P'_y - Q'_x}{Qf'_x - Pf'_y} \Rightarrow k = f\,\frac{P'_y - Q'_x}{Qf'_x - Pf'_y}.$$

Введем функции:

$$\boxed{\mathbf{POK\_MU\_F}(p, q, f, x, y) := \frac{f(p'_y - q'_x)}{qf'_x - pf'_y}}$$

Используя функцию TEST_POL_DIF, эту функцию можно задать также так:

$$\boxed{\mathbf{POK\_MU\_F}(p, q, f, x, y) := \frac{f\,\mathrm{TEST\_POL\_DIF}(p, q, x, y)}{qf'_x - pf'_y}}$$

$$\boxed{\mathbf{NOV\_UR\_F}(p, q, f, x, y) := \left[pf^{\mathbf{POK\_MU\_F}(p,q,f,x,y)}, qf^{\mathbf{POK\_MU\_F}(p,q,f,x,y)}\right]}$$

> **RESH_URMU_F**$(p, q, f, x, y)$ :=
> **UR_POL(ELEMENT(NOV_UR_F**$(p, q, f, x, y)$**,1),**
> **ELEMENT(NOV_UR_F**$(p, q, f, x, y)$**,2))**

Функция **POK_MU_F** определяет показатель $k$, **NOV_UR_F** – функции при $dx$ и при $dy$ в новом уравнении – в уравнении в полных дифференциалах. **RESH_URMU_F** определяет решение нового, а значит, и данного, уравнений.

## ЗАДАЧИ

Решить данные уравнения.

**Задача 1.** $y\,dx + (x^2 + y^2 - x)\,dy = 0,\ \ \mu = f(x^2 + y^2)$.

Решение.

1. Уточним вид интегрирующего множителя.

**POK_MU_F**$(y, x^2 + y^2 - x, x^2 + y^2 + a)$ ↲ S ↲.

Результат: $-\dfrac{x^2 + y^2 + a}{x^2 + y^2}$.

Следовательно, $a = 0$, $k = -1 \Rightarrow \mu = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

2. Решим уравнение.

**RESH_URMU_F**$(y, x^2 + y^2 - x, x^2 + y^2)$ ↲ S ↲.

Результат: $\mathbf{ATAN}\left[\dfrac{x}{y}\right] + y = c$.

3. Сделаем проверку.

**PROV**2$(y, x^2 + y^2 - x, \mathbf{atan}(x / y) + y - c)$ ↲ S ↲. Результат: 0.
Следовательно, уравнение решено правильно.

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right) + y = C$.

**Задача 2.** $(3x + 2y + y^2)\,dx + (x + 4y + 5y^2)\,dy = 0,\ \ \mu = f(x + y^2)$.

Решение.

Убедитесь в том, что $\mu = x + y^2$

**RESH_URMU_F**$(3x + 2y + y^2, x + 4xy + 5y^2, x + y^2)$ ↲S ↲FR↲

Результат: $(x + y)(x + y^2)^2 = c$.

Сделайте проверку.

**Задача 3.** $(x^3 - xy^2 - y)\,dx + (x^2 y - y^3 + x)\,dy = 0,\ \ \mu = f(x^2 - y^2)$.

Ответ: $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x - y}{x + y} = C$ $(a = 0)$.

**Задача 4.** $(3y^2 - x)\mathrm{d}x + (2y^3 - 6xy)\mathrm{d}y = 0,\ \ \mu = f(x + y^2)$.

**Задача 5.** $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + x(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = 0,\ \ \mu = f(x^2 + y^2)$.

**Задача 6.** $y\mathrm{d}x - (x + x^2 + y^2)\mathrm{d}y = 0,\ \ \mu = f(x^2 + y^2)$.

## Уравнение Риккати

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \tag{1}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ – известные функции, называется ***уравнением Риккати.***

Пусть $y = \varphi(x)$ является решением уравнения. Сделаем подстановку $y = \varphi(x) + \dfrac{1}{\psi(x)}$. Тогда $y' = \varphi' - \psi^{-2}\psi'$, данное уравнение принимает вид $\psi' + (2\varphi p + q)\psi = -p$. Это линейное уравнение относительно функции $\psi(x)$.

Введем функции:

$$\boxed{\mathbf{LIN1\_VS}(p,q,x,y) := \left(c + \int q e^{\int p\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right) e^{-\int p\,\mathrm{d}x}}$$

$$\boxed{\mathbf{RIC1}(p,q,u,x,y) := y = u + \mathbf{LIN1\_VS}(2up + q, -p)^{-1}}$$

Функция **RIC1** служит для решения уравнений вида (1). Здесь $u$ — частное решение этого уравнения. Функция **LIN1_VS** — вспомогательная, это решение линейного уравнения (она отличается от **LIN1** отсутствием $y =$ ).

Для проверки результатов введем функцию

$$\boxed{\mathbf{PROV\_RIC}(p,q,r,f,x,y) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f - pf^2 - qf - r}$$

Здесь $f$ – решение уравнения в явном виде. Результатом обращения к функции должен быть 0.

## ЗАДАЧИ

Решите уравнения.

**Задача 1.** $y' - y^2 + 2e^x y = e^{2x} + e^x$, если известно его частное решение $y_1 = e^x$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $y' = y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x$. Это уравнение Риккати, $p(x) = 1$, $q(x) = -2e^x$, $u = e^x$.

1. Решим это уравнение.

**RIC1**$(1, -2e^x, e^x)$ ↲ S ↲. Результат: $y = e^x - \dfrac{1}{x - c}$.

2. Сделаем проверку. Если вы работаете в версии 1.57, то предварительно установите MANAGE EXPOTENTIAL: Direction:Expand ↲.

**PROV_RIC**$\left(1, -2e^x, e^{2x} + e^x, e^x - \dfrac{1}{x - c}\right)$ ↲ S ↲ E ↲ S ↲.

Результат: 0.

Ответ: $y = e^x + \dfrac{1}{C - x}$.

**Задача 2.** $y'e^{-x} + y^2 - 2ye^x = 1 - e^{2x}$, $y_1 = e^x$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $y' = e^x(-y^2 + 2ye^x + 1 - e^{2x})$. Следовательно, $p = -e^x$, $q = 2e^{2x}$, $r = e^x(1 - e^{2x})$, $u = e^x$.

Продолжите решение самостоятельно. Проверка выполняется аналогично тому, как это сделано в предыдущем примере.

**Задача 3.** $y' + y^2 - 2y\sin x + \sin^2 x - \cos x = 0$, $y_1 = \sin x$.

Ответ: $y = \sin x + \dfrac{1}{x + C}$.

**Задача 4.** $xy' - y^2 + (2x + 1)y = x^2 + 2x$, $y_1 = x$.

**Задача 5.** $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1$, $y_1 = -\dfrac{1}{x}$.

Ответ: $y = -\dfrac{1}{x(\ln x - C)} - \dfrac{1}{x}$.

Если известны два решения уравнения Риккати $u(x)$ и $v(x)$, то общий интеграл уравнения следующий:

$$\frac{y-u(x)}{y-v(x)} = Ce^{\int p(x)[u(x)-v(x)]\mathrm{d}x}. \qquad (2)$$

Введем функцию:

$$\boxed{\mathbf{RIC2}(p,u,v,x,y) := \frac{y-u}{y-v} = ce^{\int p(u-v)\mathrm{d}x}}$$

**Задача 6.** Решить уравнение $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{m^2}{x^4} - y^2$ при условии, что оно имеет частные решения $y_1 = \frac{1}{x} + \frac{m}{x^2}$ и $y_1 = \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2}$.

Решение.

$\mathbf{RIC2}\left(-1, \frac{1}{x} + \frac{m}{x^2}, \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2}\right)$ ↵ S ↵.

Результат: $\frac{x^2y - x - m}{x^2y - x + m} = ce^{2m/x}$.

Выразите из этого уравнения $y$.

Ответ: $\frac{x^2y - x - m}{x^2y - x + m} = Ce^{2m/x}$ или $y = \frac{-2m}{x^2(Ce^{2m/x} - 1)} + \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2}$.

Можно выразить $y$ из уравнения (2): $y = \frac{v-u}{A-1} + v$, где $A$ – правая часть равенства (2). Соответствующую функцию обозначим через **RIC2_UV**.

Введем эту функцию.

$$\boxed{\mathbf{RIC2\_UV}(p,u,v,x,y) := y = \frac{v-u}{c\,\mathrm{EXP}(\int p(u-v)\mathrm{d}x) - 1} + v}$$

Решим последнее уравнение, используя функцию **RIC2_UV**.

$$\mathbf{RIC2\_UV}\left(-1, \frac{1}{x}+\frac{m}{x^2}, \frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}\right) \hookleftarrow \mathrm{S} \hookleftarrow \mathrm{E} \hookleftarrow.$$

Результат: $y = \dfrac{2m}{x^2(Ce^{2m/x}-1)} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{m}{x^2}$.

Решим теперь это уравнение, используя функцию RIC1.

$$\mathbf{RIC1}\left(-1, 0, \frac{1}{x}+\frac{m}{x^2}\right) \hookleftarrow \mathrm{S} \hookleftarrow \mathrm{E} \hookleftarrow$$ и

$$\mathbf{RIC1}\left(-1, 0, \frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}\right) \hookleftarrow \mathrm{S} \hookleftarrow \mathrm{E} \hookleftarrow.$$

Сделайте проверку полученных ответов.

## Уравнения Лагранжа и Клеро

***Уравнение Клеро*** имеет вид: $y = xy' + \psi(y')$. Общее решение уравнения Клеро имеет вид: $y = Cx + \psi(C)$. Следовательно, это решение легко находится без компьютера.

***Уравнение Лагранжа*** имеет вид: $y = x\varphi(y') + \psi(y')$. Таким образом, уравнение Клеро есть частный случай уравнения Лагранжа.

Будем решать уравнения Лагранжа. Положим $t = y'$, тогда уравнение сводится к линейному уравнению

$$x' + \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)-t}x = \frac{\psi'(t)}{t-\varphi(t)}.$$

Если $x = \Phi(t, C)$ – решение этого уравнения, то решение данного уравнения Лагранжа находится в параметрической форме:

$$x = \Phi(t, C), \quad y = \Phi(t)\varphi(t) + \psi(t).$$

Уравнения Лагранжа и Клеро могут иметь особое решение, об этом читайте в подразделе «Огибающая семейства кривых и особые решения дифференциального уравнения».

Введем функции

$$\mathbf{RESH1\_LAGR}(u,v,t,x) := \mathrm{LIN1\_VS}\left(\frac{u'_t}{u-t}, -\frac{v'_t}{u-t}, t, x\right)$$

$$\mathrm{RESH2\_LAGR}(u,v,t,x) := u\,\mathrm{RESH1\_LAGR}(u,v,t,x) + v$$

$$\mathbf{LAGR\_UR}(u,v,t,x,y) :=$$
$$[x = \mathrm{RESH1\_LAGR}(u,v,t,x), y = \mathrm{RESH2\_LAGR}(u,v,t,x)]$$

Здесь $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$, где $t = y'$.

***Замечание.*** Эти функции не пригодны для решения уравнений Клеро, ответьте сами, почему.

## ЗАДАЧИ

Решите данные уравнения.

**Задача 1.** $y = x(1 + y') + y'^2$.

Решение.

$\mathbf{LAGR\_UR}(1 + t, t^2)$ ↲ S ↲.

Результат: $\left[x = ce^{-t} - 2(t-1), y = c(t+1)e^{-t} - t^2 + 2\right]$.

Ответ: $x = Ce^{-t} - 2(t-1)$, $y = C(t+1)e^{-t} - t^2 + 2$.

**Задача 2.** $y = 2xy' + \ln(y')$.

**Задача 3.** $y = 2xy' + \sin y'$.

**Задача 4.** $y = xy'^2 - \dfrac{1}{y'}$.

**Задача 5.** $y = xy'^2 + y'^2$.

## Уравнения Дарбу

Уравнение вида $P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y + u(x, y)(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = 0$, где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции порядка $m$, а $u(x, y)$ – однородная функция порядка $n$, называется ***уравнением Дарбу***.

Введем функции

$$\mathbf{DARBU1}(p, q, u, k, x, y) :=$$

$$\lim_{z \to y/x} \mathbf{BERN}\left[\lim_{y \to z}\lim_{x \to 1}\frac{q}{p + zq}, -\lim_{y \to z}\lim_{x \to 1}\frac{u}{p + yq}, k, z, x\right]$$

Здесь $k = n - m + 2$.

При использовании функции **DARBU1** надо самим вводить число $k$. Поставим цель определить функцию **DARBU** так, чтобы не приходилось вводить это число.

Введем функцию

$$\mathbf{POK\_ODN}(p, x, y, t) := \frac{\mathrm{LN}(\mathrm{TEST\_ODN1}(p, x, y, t))}{\mathrm{LN}\,t}$$

Функция **TEST_ODN1** была введена ранее в подразделе «Однородные уравнения».

**Пример.** **POK_ODN**$(x^3 + xy^2)$ ↲ S ↲. Результат: 3, то есть эта функция определяет показатель однородности (однородной функции).

$$\mathbf{POK\_D}(p, u, x, y, t) :=$$

$$\mathbf{POK\_ODN}(u, x, y, t) - \mathrm{POK\_ODN}(p, x, y, t) + 2$$

**Примеры**

**POK_D**$(x, x^2)$ ↲ S ↲. Результат: 3. (См. замечание ниже.)

**POK_D**$(x + 3y, x^3 y)$ ↲ S ↲. Результат: 5.

Функция **POK_D** определяет число $k$. Следовательно, достаточно заменить число $k$ в функции DARBU1 на POK_D, и цель будет выполнена.

$$\mathbf{DARBU}(p,q,u,x,y,t) := x^{\mathbf{POK\_D}(p,u,x,y)-1} \sim$$
$$\lim_{z\to y/x} \mathrm{BERN}\left(\lim_{y\to z}\lim_{x\to 1}\frac{q}{p+zq}, -\lim_{y\to z}\lim_{x\to 1}\frac{u}{p+yq}, \mathrm{POK\_D}(p,u,x,y,t), z, x\right)$$

При использовании функции **POK_ODN, POK_D, DARBU** предварительно необходимо:

1) определить переменную $t$ как положительную, для этого нажать на клавиши **D V t ↵ DP** (Declare Variable t Pozitive),

2) нажать на клавиши **M L E** (Manage Logarithm Expand).

Для проверки полученного результата введем функции:

$$\mathbf{VID\_C}(f,x,y) := -\frac{f - cf_c'}{f_c'}$$

$$\mathbf{PROIZ\_REZ}(f,x,y) := -\lim_{c\to \mathrm{VID\_C}(f,x,y)} \frac{f_x'}{f_y'}$$

$$\mathbf{PROIZ\_DANO}(p,q,u,x,y) := -\frac{p-uy}{q+ux}$$

$$\mathbf{PROV\_D}(p,q,u,f,x,y) :=$$
$$\mathbf{PROIZ\_REZ}(f,x,y) - \mathrm{PROIZ\_DANO}(p,q,u,x,y)$$

Как обычно, находится разность между производной полученной неявной функции по переменной $x$ и данной в условии производной.

Названия функций говорят об их предназначении: **VID_C** – выделить (выразить) **C**. **PROV_D** – проверка. Результат ее выполнения должен равняться нулю.

## ЗАДАЧИ

Решить данные уравнения.

**Задача 1.** $x\,dx + y\,dy + x^2(x\,dy - y\,dx) = 0$.

Решение.

1. В данном примере $P(x, y) = x$, $Q(x, y) = y$ — это однородные функции первого порядка, $u(x, y) = x^2$ — однородная функция второго порядка. Следовательно, данное уравнение является уравнением Дарбу $k = 2 - 1 + 2 = 3$. Воспользуемся функцией **DARBU1**.

**DARBU1**$(x, y, x^2, 3)$ ↵ S ↵ ↵ F4 $*$ $x$^2 ↵ S ↵.

Результат: $(x^2 + y^2)\mathbf{ATAN}\left[\dfrac{y}{x}\right] + cx^2 + xy + cy^2 = 1$.

Воспользуемся теперь функцией **DARBU**. Не забудьте сделать установки, про которые мы уже говорили.

**DARBU**$(x, y, x^2)$ ↵ S ↵. Результат тот же.

2. Проверка.

**PROV_D**$(x, y, x^2, (x^2 + y^2)\mathbf{ATAN}(y/x) + cx^2 + xy + cy^2 - 1)$ ↵ S ↵.

Результат: 0, что и требовалось показать.

**Задача 2.** $y\,dx + x\,dy + x^2y^2(x\,dy - y\,dx) = 0$.

**Задача 3.** $y\,dx + x\,dy + (x^2 + y^2)(x\,dy - y\,dx) = 0$.

**Задача 4.** $x^3\,dx + y^3\,dy + x^3y^3(x\,dy - y\,dx) = 0$.

**Задача 5.** $x\,dx + y\,dy + (x^2 - xy)(x\,dy - y\,dx) = 0$.

**Задача 6.** $x\,dx + y\,dy + (x^3 - xy^2)(x\,dy - y\,dx) = 0$

# Огибающая семейства кривых и особые решения дифференциального уравнения

Решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения $\Phi(x, y, y') = 0$ (1) называется ***особым***, если в каждой его точке нарушается свойство единственности, то есть если через каждую его точку $(x_0; y_0)$, кроме этого решения, проходит и другое решение, имеющее в точке $(x_0; y_0)$ ту же касательную, что и решение $y = \varphi(x)$, но не совпадающее с ним в сколь угодно малой окрестности точки $(x_0; y_0)$. График особого решения называется ***особой интегральной кривой уравнения*** (1).

Пусть $F(x, y, c) = 0$ (2) есть общий интеграл уравнения (1), тогда огибающая семейства (2) является особой интегральной кривой.

## ЗАДАЧИ

Найти особые решения уравнения, зная его общий интеграл. Сделать рисунок.

**Задача 1.** $y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}$ (*), $y = cx + c^2 + \frac{x^2}{2}$ (**).

Решение.

1. Найдите, как обычно, огибающую семейства (**). Результат: $y = \frac{x^2}{4}$.

2. Убедитесь в том, что функция $y = \frac{x^2}{4}$ является решением уравнения (*).

3. Докажите, что кривая $y = \frac{x^2}{4}$ является огибающей семейства (**). Сделайте рисунок.

Ответ: $y = \frac{x^2}{4}$ – особое решение данного уравнения.

**Задача 2.** $(xy' + y^2) = y^2 y'$, $y(c - x) = c^2$.
Ответ: $y = 0$, $y = 4x$.

**Задача 3.** $y'^2 - yy' + e^x = 0$, $y = ce^x + \frac{1}{c}$.

Ответ: $y = 2e^{x/2}$, $y = -2e^{x/2}$.

**Задача 4.** $y^2 y'^2 + y^2 = 1$, $(x - c)^2 + y^2 = 0$.
Ответ: $y = 1$, $y = -1$.

**Задача 5.** $3xy'^2 - 6yy' + x + 2y = 0$, $x^2 + c(x - 3y) + c^2 = 0$.
Ответ: $y = -x/3$, $y = x$.

**Задача 6.** $y' = 4x\sqrt{y - 1}$, $y = (x^2 + c)^2 + 1$.
Ответ: $y = -1$.

**Задача 7.** $xy'^2 + 2xy' - y = 0$, $(y - c)^2 = 4cx$.
Ответ: $x = 0$, $y = -x$.

# ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

## Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ называется ***линейным однородным уравнением второго порядка***.

Пусть дано линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами, то есть уравнение вида $y'' + py' + qy = 0$, где $p$ и $q$ – некоторые постоянные. Уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ называется ***характеристическим уравнением*** данного линейного однородного уравнения, а многочлен $\lambda^2 + p\lambda + q$ – его ***характеристическим многочленом***.

При решении линейного однородного дифференциального уравнения сначала решают соответствующее ему характеристическое уравнение. Возможны три случая.

**Задача 1.** Характеристическое уравнение имеет различные действительные корни $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Тогда функции $e^{\lambda_1 x}$ и $e^{\lambda_2 x}$ образуют фундаментальную систему его решений и общее решение данного уравнения имеет вид: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные.

**Задача 2.** Корни характеристического уравнения совпадают и равны $\lambda$. Тогда фундаментальную систему функций данного уравнения образуют функции $e^{\lambda x}$ и $xe^{\lambda x}$, а его общее решение имеет вид: $y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$.

**Задача 3.** Характеристическое уравнение имеет комплексные корни $\alpha + i\beta$ и $\alpha - i\beta$. Тогда фундаментальную систему решений данного уравнения образуют функции $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$, общее решение уравнения имеет вид: $y = C_1$ $y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Пусть дано линейное неоднородное уравнение $y'' + py' + q = r(x)$ с постоянными коэффициентами.

Его общее решение есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.

Введем функции для решения линейного уравнения с постоянными коэффициентами и для проверки решения.

$$\mathbf{WRON}(u,v,x,y):=\mathbf{DET}\begin{bmatrix} u & v \\ u'_x & v'_x \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{LIN}2(u,v,r,x,y):=$$
$$y=cu+dv-u\int\frac{rv}{\mathrm{WRON}(u,v,x,y)}\mathrm{d}x+v\int\frac{ru}{\mathrm{WRON}(u,v,x,y)}\mathrm{d}x$$

Функция **WRON** (вронскиан) принимает значение, не равное нулю, тогда и только тогда, когда функции $u$ и $v$ линейно независимы (то есть образуют фундаментальную систему функций).

Функция **LIN2** возвращает решение линейного дифференциального уравнения при условии, что $u$ и $v$ – фундаментальная система решений данного дифференциального уравнения.

Для проверки полученных решений введем функции

$$\mathbf{UR\_LIN}(s,p,q,f,r,x):=s\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}+p\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+qf$$

$$\mathbf{PROV\_LIN}\,2(s,p,q,f,r,x):=\mathrm{UR\_LIN}(s,p,q,f,x)-r$$

Функция **UR_LIN** может быть использована также для подбора решений уравнения. В дальнейшем мы познакомимся с этим методом.

## ЗАДАЧИ

Решить данные уравнения.

**Задача 1.** $y''-y=2e^x-x^2$.

Решение.

1. Найдем корни характеристического уравнения.

$\lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda=1,\ \lambda=-1.$

2. Следовательно, фундаментальная система функций данного уравнения состоит из функций $e^x$ и $e^{-x}$. Можно убедиться в том, что эти функции линейно независимы, используя функцию **WRON**.

**WRON**$(e^x, e^{-x})$ ↵ S ↵. Результат: $-2 \neq 0$.

3. Решим данное уравнение.

**LIN2**$(e^x, e^{-x}, 2e^x - x^2)$ ↵ S ↵.

Результат: $y = \left[x + c - \dfrac{1}{2}\right]e^x + de^{-x} + x^2 + 2$.

4. Проверка.

**UR_LIN**$(1,0,-1,y)$ (здесь $y$ — полученная функция) ↵ S ↵.

Результат: $2e^x - x^2$, что и требовалось доказать. Для проверки можно использовать еще и функцию **PROV_LIN2**.

**PROV_LIN2** $(1,0,-1,y,2e^x - x^2)$ (здесь $y$ — полученная функция) ↵ S ↵. Результат: 0, как и должно быть.

Ответ: $y = \left(x - \dfrac{1}{2} + c\right)e^x + De^x + x^2 + 2$.

**Задача 2.** $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$.

Решение.

1. Найдем корни характеристического уравнения:

$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$.

2. Следовательно, фундаментальная система функций данного уравнения состоит из функций $e^{-2x}$ и $xe^{-2x}$.

3. Решим данное уравнение.

**LIN2**$(e^{-2x}, xe^{-2x}, xe^{2x})$ ↵ S ↵.

Результат: $y = \dfrac{(2x-1)e^{2x}}{32} + (dx + c)e^{-2x}$.

4. Сделайте проверку и запишите ответ.

**Задача 3.** $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

Решение.

1. Найдем корни характеристического уравнения:

$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$.

2. Следовательно, фундаментальная система функций данного уравнения состоит из функций $\cos x$ и $\sin x$.

3. Решим данное уравнение.

**LIN2**$(\cos x, \sin x, 1/\sin x)$ ↲ S ↲.

Результат: $y = \sin x \ln \sin x + (c - x)\cos x + d \sin x$.

4. Проверка.

**UR_LIN**$(1,0,1,y)$ ( здесь $y$ — полученная функция ) ↲ S ↲.

Результат: $\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} + \sin x$. F ↲ Trivial ↲. Результат: $\dfrac{1}{\sin x}$.

Ответ: $y = \sin x \ln \sin x + (C - x)\cos x + D \sin x$.

> ***Замечание.*** Не забывайте, что форма ответа зависит от того, какие установки сделаны в **MANAGE TRIGONOMETRY**.

**Задача 4.** $y'' - 2y' + 2y = e^x$.

Р е ш е н и е.

1. Найдем корни характеристического уравнения.

$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 + i, \ \lambda = 1 - i$.

2. Фундаментальная система решений состоит из функций $e^x \cos x$ и $e^x \sin x$.

Продолжите решение задачи самостоятельно. При проверке установите:

**M TRIGONOMETRY:Direction:Auto Toward:Auto.**

**Задача 5.** $y'' - 2y' + 5y = 2xe^x + e^x \sin 2x$.

Р е ш е н и е.

**LIN2**$(e^x\cos 2x, e^x\sin 2x, 2xe^x\sin 2x + e^x\sin 2x)$ ↲ S ↲.

Сделайте проверку.

**Задача 6.** $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

**Задача 7.** $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$.

**Задача 8.** $y'' + y = 4xe^x$.

**Задача 9.** $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x} \sin 2x$.

**Задача 10.** $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

**Задача 11.** $y'' - 2y' + y = 2xe^x + e^x \sin 2x$.

## Линейные уравнения с переменными коэффициентами. Метод Лагранжа

Пусть известно одно частное решение линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами 2-го порядка. Тогда второе частное решение этого уравнения можно найти, используя метод Лагранжа. С сутью метода можно познакомиться, например по задачнику [9].

Введем функции для определения второго решения уравнения и для решения самого уравнения.

$$\boxed{\mathbf{VS}(p,u,x,y) := u\int\frac{\mathrm{EXP}\left(-\int p\,\mathrm{d}x\right)}{u^2}\,\mathrm{d}x := u\int\frac{\mathrm{EXP}\left(-\int p\,\mathrm{d}x\right)}{u^2}\,\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{\mathbf{LAGR}(p,r,u,x,y) := \mathbf{LIN2}(u,\mathbf{VS}(p,u,x,y),r,x,y)}$$

**VS** – вспомогательная функция, функция **LAGR** определяет решение линейного неоднородного уравнения (методом Лагранжа).

### ЗАДАЧИ

Решить дифференциальное уравнение, если известно его частное решение $y_1(x)$.

**Задача 1.** $xy'' + 2y' - xy = 0, \quad y_1(x) = \dfrac{e^x}{x}.$

Решение.

1. Перепишем уравнение в виде $y'' + \dfrac{2}{x} - y = 0.$

$\mathbf{LAGR}\left(\dfrac{2}{x},0,\dfrac{e^x}{x}\right)$ ↵ S ↵. Результат: $y = \dfrac{ce^x}{x} - \dfrac{de^{-x}}{2x}.$

Так как $d$ — произвольная константа, этот ответ можно записать в виде $y = \dfrac{ce^x}{x} + \dfrac{de^{-x}}{x}.$

2. Проверка.

$\mathbf{UR\_LIN}\left(x,2,-x,\dfrac{ce^x}{x} + \dfrac{de^{-x}}{x}\right)$ ↵ S ↵. Результат: 0, что и требовалось показать.

Или $\mathbf{UR\_LIN}\left(1,\frac{2}{x},-1,\frac{ce^{x}}{x}+\frac{de^{-x}}{x}\right)$ ↲ S ↲. Результат: 0.

Ответ: $y=\frac{Ce^{x}}{x}+\frac{De^{-x}}{x}$.

Ниже рассмотрено решение неоднородных уравнений при помощи функции **LAGR**.

## Подбор частных решений линейного уравнения

В некоторых случаях частное решение дифференциального уравнения можно подобрать.

### ЗАДАЧИ

Найти частное решение уравнения $y_1(x)$.

**Задача 1.** $(1-2x^2)y''+2y'+4y=0$.

Решение.

Будем искать решение в виде многочлена $x^n$.

1. $\mathbf{UR\_LIN}(1-2x^2,2,4,x^n)$ ↲ S ↲ E ↲.

Найдем коэффициент при $x^n$, приравняем его к нулю и решим полученное уравнение.

$n^2-n-2$ L ↲. Результат: $n=-1$, $n=2$.

Следовательно, будем искать решение в виде многочлена второго порядка: $x^2+bx+c$.

2. $\mathbf{UR\_LIN}(1-2x^2,2,4,x^2+bx+c)$ ↲ S ↲.

Результат: $2(2x(b+1)+b+2c+1)$.

3. Приравняем к нулю коэффициент при $x$ и свободный член.

$[b+1=0,b+2c+1=0]$ L ↲. Результат: $b=-1$, $c=0$.

Следовательно, одно из частных решений данного уравнения равно $x^2-x$.

4. Можно убедиться в том, что найденная функция действительно является решением данного уравнения, используя функцию **UR_LIN**.

$\mathbf{UR\_LIN}(1-2x^2,2,4,x^2-x)$ ↲ S ↲. Результат: 0, что и требовалось доказать.

Ответ: $y=x^2-x$.

2. $(x+1)xy''+(x+2)y'-y=x+\frac{1}{x}$.

3. $(2x+1)y''+(2x-1)y'-2y=x^2+x$.

## Примеры решения линейных неоднородных уравнений с переменными коэффициентами

Решить данные дифференциальные уравнения.

**Задача 1.** $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$.

Решение.

1. Найдем частное решение данного уравнения $y_1$.

**UR_LIN**$(x^2,-x,-3,x^n)$ ↵ S ↵.

Результат: $(n^2-2n-3)x^n \Rightarrow n=3 \Rightarrow$ частное решение ищем в виде многочлена третьего порядка: $x^3+ax^2+bx+c$.

**UR_LIN**$(x^2,-x,-3,x^3+ax^2+bx+c)$ ↵ S ↵.

Результат: $-3ax^2-4bx-3c \Rightarrow a=b=c=0 \Rightarrow y_1 = x^3$.

2. Решим уравнение, используя функцию **LAGR**. Перепишем уравнение в виде $y'' - \dfrac{1}{x}y' - \dfrac{3}{x^2} = 5x^2$.

**LAGR**$\left(-\dfrac{1}{x},5x^2,x^3\right)$ ↵ S ↵. Результат: $y = x^4 + cx^3 - \dfrac{d}{4x}$.

Здесь $d$ — произвольная константа, поэтому можно переписать полученный результат в виде $y = x^4 + cx^3 + \dfrac{d}{4x}$.

3. Сделайте проверку.

Ответ: $y = x^4 + Cx^3 + \dfrac{D}{4x}$.

**Задача 2.** $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$, $y_1 = e^{ax}$.

Решение.

1. Найдем частное решение данного уравнения, для этого надо определить значение $a$.

**UR_LIN**$(x,-(2x+1),x+1,e^{ax})$ ↵ S ↵.

Результат: $(x(a^2-2a+1)-a+1)e^{ax}$. Выражение в скобках равно нулю при $a=1$. Следовательно, функция $e^x$ является частным решением данного уравнения. Можно проверить это, например, при помощи функции **UR_LIN**.

2. Решим данное уравнение. Предварительно перепишем его в виде $y'' - \dfrac{2x+1}{x}y' + \dfrac{x+1}{x}y = 0$.

**LAGR**$\left(-\dfrac{2x+1}{x},0,e^x\right)$ ↵ S ↵. Результат: $y = \left(\dfrac{dx^2}{2}+c\right)e^x$.

Перепишем его в виде $y = (dx^2 + c)e^x$.

3. Сделайте проверку.

Ответ: $y = (Dx^2 + C)e^x$.

**Задача 3.** $xy'' - (1 + 2x^2)y' = 4x^3e^{x^2}$.

Решение.

1. По виду правой части можно предположить, что функция $e^{x^2}$ является решением данного уравнения. Проверим это.

**UR_LIN** $(x, -(1 + 2x^2), 0, e^{x^2})$ ↵ S ↵. Результат: 0.
Следовательно, предположение верно.

2. Перепишем уравнение в виде $y'' - \dfrac{1 + 2x^2}{x} y' = 4x^2e^{x^2}$.

$$\textbf{LAGR}\left(-\frac{1 + 2x^2}{x}, 4x^2e^{x^2}, e^{x^2}\right) ↵ \text{ S } ↵.$$

После преобразований результат: $y = (x^2 + c)e^{x^2} + d$.

3. Сделайте проверку.

Ответ: $y = (x^2 + C)e^{x^2} + D$.

**Задача 4.** $(2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0$.

**Задача 5.** $xy'' = (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0$.

**Задача 6.** $x(x - 1)y'' - xy' + y = 0$.

**Задача 7.** $(x - 1)y'' - xy' + y = (x - 1)^2 e^x$.

## Уравнения Эйлера

Уравнение вида $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ называется ***уравнением Эйлера второго порядка***.

Введем функции

$$\boxed{\textbf{EL\_VS}(a,b) := \left[-\frac{\sqrt{a^2 - 2a - 4b + 1} + a - 1}{2}, \frac{\sqrt{a^2 - 2a - 4b + 1} - a + 1}{2}\right]}$$

$$\boxed{\textbf{EL\_RESH 2}(u, v, r, x, y) := \lim_{x \to \text{LN } x} \text{LIN 2}(u, v, r, x, y)}$$

Функция **EL_VS** служит для определения фундаментальной системы решений вспомогательного уравнения. При обращении к функции **EL_RESH2** вместо $x$ следует ввести $e^x$, а вместо $\ln x$ надо ввести $x$.

## ЗАДАЧИ

Решите данные уравнения.

**Задача 1**. $x^2y'' - 2y = \sin\ln x$.

Решение.

1. **EL_VS**$(0,-2)$ ↵ S ↵. Результат: $[-1,2]$. Следовательно, фундаментальная система состоит из функций $e^{-x}$ и $e^{2x}$.

2. **EL_RESH**$2(e^{-x}, e^{2x}, \sin x)$ ↵ S ↵.

Результат: $y = \dfrac{\cos\ln x}{10} - \dfrac{3\sin\ln x}{10} + dx^2 + \dfrac{c}{x}$.

3. Проверка.

**UR_LIN**$(x^2, 0, -2, y)$ (вместо $y$ ввести найденное решение) ↵ S ↵.

Результат: $\sin\ln x$, что и требовалось показать.

Ответ: $y = \dfrac{\cos\ln x}{10} - \dfrac{3\sin\ln x}{10} + Dx^2 + \dfrac{C}{x}$.

**Задача 2.** $xy'' - xy' + y = 8x^3$.

Решение.

1. **EL_VS**$(-1,1)$ ↵ S ↵. Результат: $[1,1] \Rightarrow$ фундаментальная система состоит из функций $e^x$ и $xe^x$.

2. **EL_RESH2**$(e^x, xe^x, 8e^{3x})$ ↵ S ↵.

Результат: $y = dx\ln x + 2x^3 + cx$.

3. Сделайте проверку.

Ответ: $y = Dx\ln x + Cx + 2x^3$.

**Задача 3.** $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$.

Решение.

1. **EL_VS**$(-3,5)$ Результат: $[2-i, 2+i] \Rightarrow$ фундаментальная система состоит из функций $e^{2x}\cos x$ и $e^{2x}\sin x$.

2. **EL_RESH2**$(e^{2x}\cos x, e^{2x}\sin x, 3e^{2x})$ ↵ S ↵.

Результат: $y = cx^2\cos\ln x + dx^2\sin\ln x + 3x^2$.

3. Сделайте проверку.

Ответ: $y = Cx^2 \cos \ln x + Dx^2 \sin \ln x + 3x^2$.

**Задача 4.** $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = x + 4$.

Решение.

Решим уравнение $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x + 6$, а затем в полученном решении сделаем обратную замену, то есть заменим $x$ на $x - 2$.

Продолжите решение самостоятельно.

## Инвариант линейного дифференциального уравнения второго порядка

Пусть дано уравнение $y'' + p(x)y' + q(x) = 0$ (1). Функция $Q(x) = q(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x)$ называется ***инвариантом данного уравнения.*** Уравнение (1) приводится к уравнению $z'' + Q(x)z = 0$ (2) с помощью замены $y = z\exp\left(-\frac{1}{2}\int p(x)\,\mathrm{d}\,x\right)$. Если $Q(x) = \text{const}$, то уравнение (2) – уравнение с постоянными коэффициентами, иначе это уравнение Лагранжа.

Введем функции

$$\mathbf{INVAR}(p, q, x, y) := q - \frac{p^2}{4} - \frac{p'_x}{2}$$

$$\mathbf{RESH\_LUR2P}\,(p, u, v, x, y) := y = \mathrm{EXP}\left(-\frac{1}{2}\int p\,\mathrm{d}\,x\right)(cu + dv)$$

Функция **RESH_LUR2P** служит для решения данного уравнения (1), если функция **INVAR** равна константе. Здесь функции $u$ и $v$ – фундаментальная система решений уравнения (2).

Если приведенное уравнение есть уравнение Эйлера, для его решения используем функцию **SVOD_UREL2** (сокращение от «сводящееся к уравнению Эйлера»). Если в версии Derive недоступна функция выделения правой части равенства, приходится вводить вспомогательные функции

**LIN2_VS** и **EL_RESH_VS**. **LIN2_VS** отличается от функции **LIN2** только отсутствием y = .

$$\mathbf{LIN2\_VS}(u,v,r,x,y) := cu + dv - u\int \frac{rv}{\mathbf{WRON}(u,v,x,y)}\,\mathbf{d}x + v\int \frac{ru}{\mathbf{WRON}(u,v,x,y)}\,\mathbf{d}x$$

$$\mathbf{EL\_RESH\_VS}(u,v,r,x,y) := \lim_{x \to \mathrm{LN}\,x} \mathrm{LIN2\_VS}(u,v,r,x,y)$$

$$\mathbf{SVOD\_UREL2}(p,u,v,x,y) := y = \mathrm{EXP}\left(-\frac{1}{2}\int p\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{EL\_RESH\_VS}(u,v,0,x,y)$$

## ЗАДАЧИ

Решите данные дифференциальные уравнения.

**Задача 1.** $x^2y'' - 2xy' + (x^2 + 2) = 0.$

Решение.

1. Найдем инвариант уравнения. Перепишем уравнение в виде $y'' - \frac{2}{x}y' + 1 + \frac{2}{x^2} = 0$.

**INVAR**$(-2/x, 1 + 2/x^2)$ ↲ S ↲. Результат: 1. Следовательно, уравнение принимает вид $z'' + z' = 0$. Его фундаментальную систему решений образуют функции $\cos x$ и $\sin x$.

2. Решим данное (в условии) уравнение.

**RESH_LUR2P** $\left(-\frac{2}{x}, \cos x, \sin x\right)$ ↲ S ↲.

Результат: $y = cx\cos x + dx\sin x$.

3. Проверка. Воспользуемся, например, функцией **UR_LIN**.

**UR_LIN**$(x^2, -2x, x^2 + 2, cx\cos x + dx\sin x)$ ↲ S ↲.

Результат: 0, что и требовалось доказать.

Ответ: $y = Cx\cos x + Dx\sin x$.

**Задача 2.** $x^2y'' - 4xy' + (6 - x^2)y = 0$.

Решение.

1. **INVAR**$(-4/x, 6/x^2 - 1)$ ↲ S ↲. Результат: $-1$, следовательно, уравнение принимает вид $z'' - z = 0$. Его фундаментальную систему решений образуют функции $e^x$ и $e^{-x}$.

2. **RESH_LUR2P**$\left(-\dfrac{4}{x}, e^x, e^{-x}\right)$ ↲ S ↲.

Результат: $y = cx^2e^x + dx^2e^{-x}$.

3. Проверка.

**UR_LIN**$(x^2, -4x, 6 - x^2, cx^2e^x + dx^2e^{-x})$ ↲ S ↲. Результат: 0.

Ответ: $y = Cx^2e^x + Dx^2e^{-x}$.

**Задача 3.** $x^2y'' + 2x^2y' + (x^2 - 2)y = 0$.

Решение.

1. **INVAR**$(2, 1 - 2/x^2)$ ↲ S ↲. Результат: $-\dfrac{2}{x^2}$. Следовательно, уравнение примет вид $z'' - \dfrac{2}{x^2}z = 0 \Rightarrow x^2z'' - 2z = 0$.

Это уравнение Эйлера.

2. **EL_VS**$(0, -2)$ ↲ S ↲. Результат: $[-1, 2]$.

3. Решим данное в условии уравнение.

**SVOD_UREL2**$(2, e^{-x}, e^{2x})$ ↲ S ↲.

Результат: $y = e^{-x}\left(dx^2 + \dfrac{c}{x}\right)$.

4. Проверка.

**UR_LIN**$\left(x^2, 2x^2, x^2 - 2, e^{-x}\left(dx^2 + \dfrac{c}{x}\right)\right)$ ↲ S ↲. Результат: 0.

Ответ: $y = e^{-x}\left(Dx^2 + \dfrac{C}{x}\right)$, $y = e^{-x}\left(Dx^2 + \dfrac{C}{x}\right)$. .

**Задача 4.** $(1 + x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0$.

**Задача 5.** $y'' + 2xy' + (x^2 + 6)y = 0$.

**Задача 6.** $y'' - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}y' + \dfrac{8 - x^2}{4x^2} = 0$, $x \in (0; \pi)$.

## Применение дифференциальных уравнений второго порядка к исследованию колебательных процессов

**Свободные колебания.** Известно, что уравнения вида $x'' + 2hx' + \omega^2 x = 0$ $(h > 0, \omega > 0)$ описывают свободные колебательные процессы, то есть вынуждающая сила отсутствует.

Характеристическое уравнение для этого уравнения имеет вид: $\lambda^2 + 2h\lambda + \omega^2 = 0$. Корни этого уравнения $\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega^2}$. Рассмотрим возможные 3 случая.

Решите данное уравнение и постройте интегральную кривую, изучите поведение кривой при $t \to +\infty$.

**А.** $h > \omega$.

**Задача 1.** $x'' + 6x' + 4x = 0$ (рис. 96).

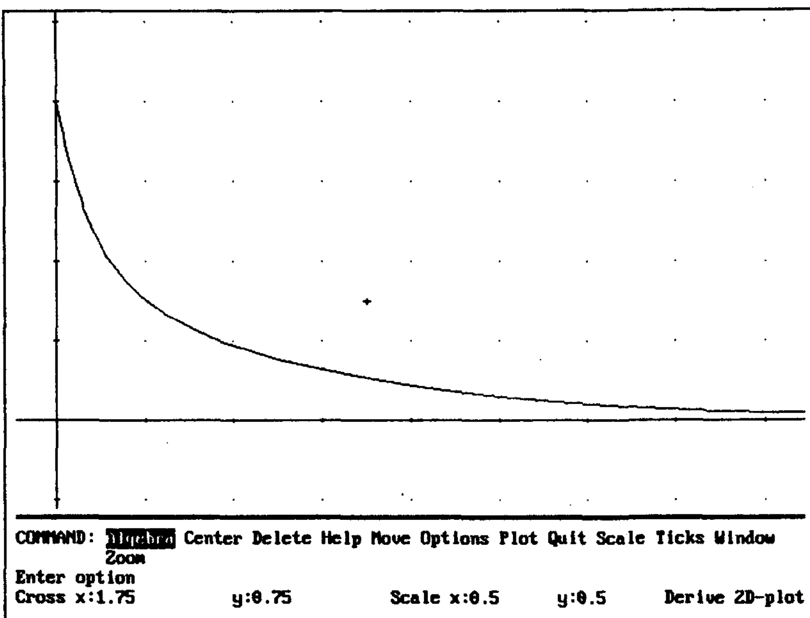



**Рис. 96**

**Б.** $h = \omega$ .

**Задача 2.** $x'' + 4x' + 4x = 0$ (рис. 97).
Это затухающее апериодическое движение.

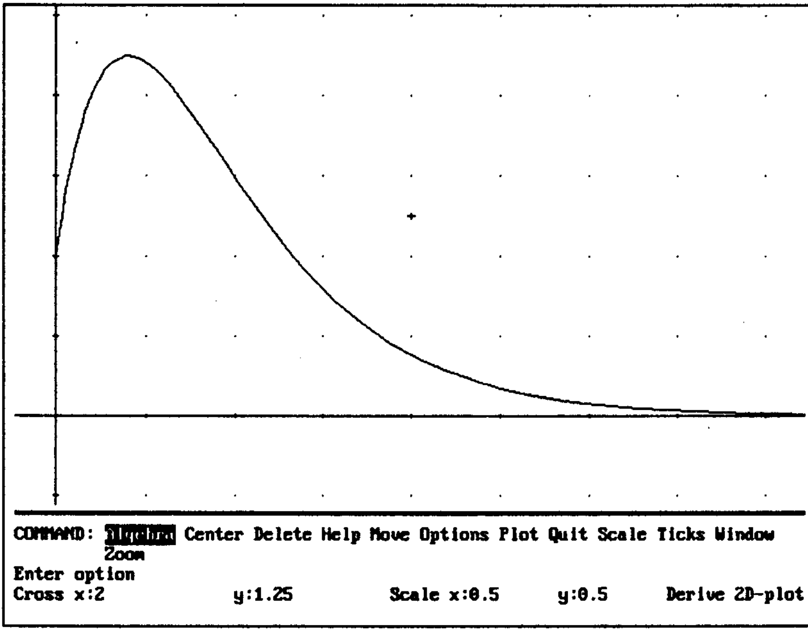



**Рис. 97**

**В.** $h < \omega$ .

**Задача 3.** $x'' + 2x' + 10 = 0$ (рис. 98).

Это затухающее апериодическое колебание.

**Задача 4.** $x'' + 8x' + 25x = 0$ .

Пусть $h = 0$, то есть сопротивление среды отсутствует.

**Задача 5.** $x'' + 25x = 0$ (рис. 99).

Это незатухающие периодические колебания.

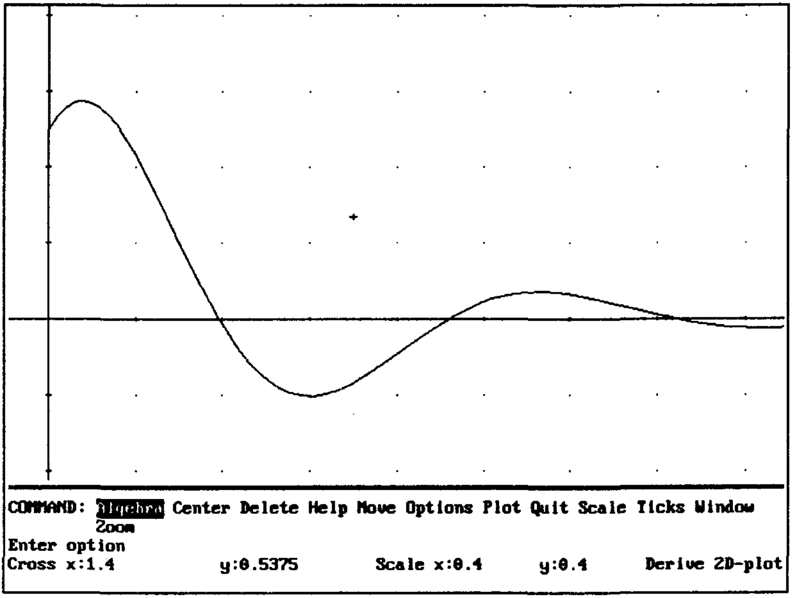

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
Zoom
Enter option
Cross x:1.4
y:0.5375
Scale x:0.4
y:0.4
Derive 2D-plot

**Рис. 98**

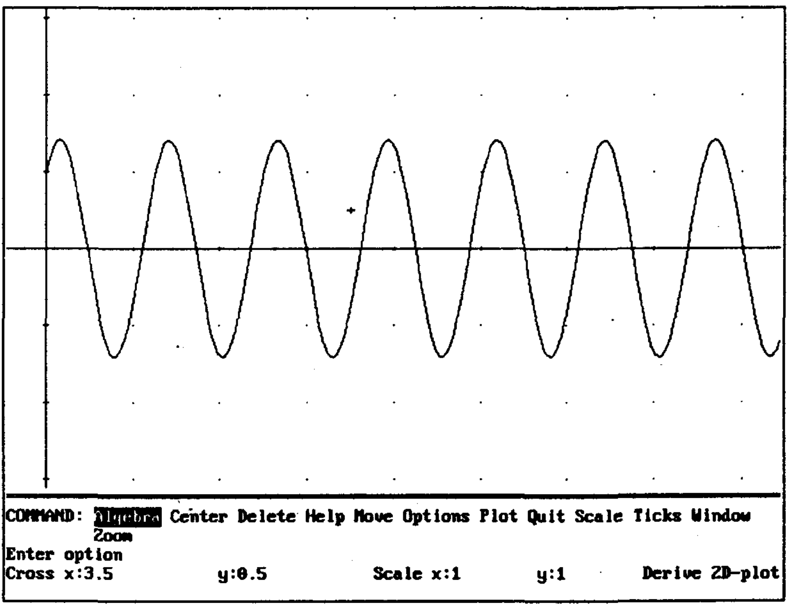

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window
Zoom
Enter option
Cross x:3.5
y:0.5
Scale x:1
y:1
Derive 2D-plot

**Рис. 99**

**Вынужденные колебания.** Будем рассматривать уравнения вида $x'' + \omega^2 x = p\sin\omega_1 t$. Это уравнения вынужденных колебаний, сопротивление среды отсутствует, вынуждающая сила имеет синусоидальный характер. Возможны 2 случая: $\omega_1 \neq \omega$ и $\omega_1 = \omega$. $\omega$ – собственная частота колебательной системы, $\omega_1$ – частота вынуждающей силы.

Задание то же: решите данное уравнение и постройте интегральную кривую, изучите поведение кривой при $t \to +\infty$.

**А.** $\omega_1 \neq \omega$.

**Задача 6.** $x'' + 4x = \sin t$ (рис. 100).

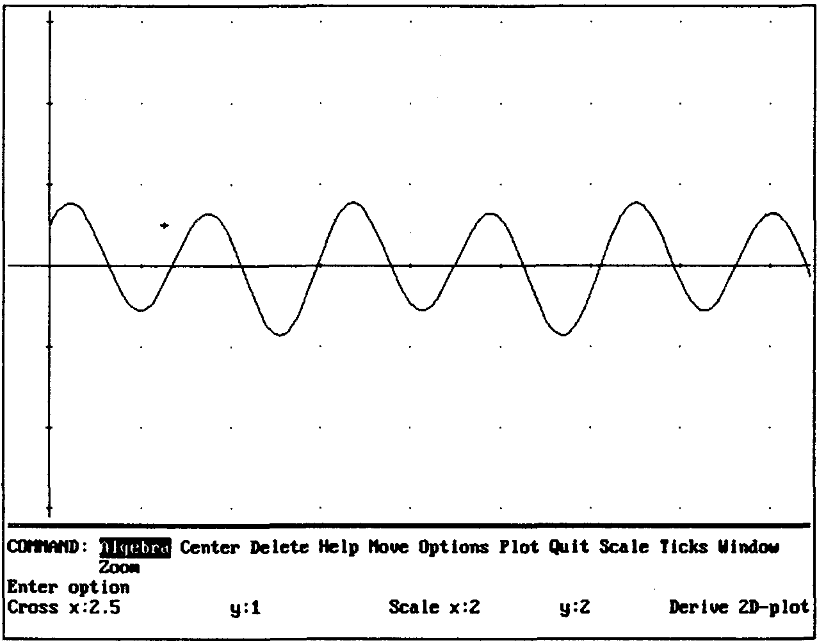



**Рис. 100**

Это периодические незатухающие колебания. Важно, что ***амплитуда колебания ограничена, если частота вынуждающей силы не равна собственной частоте колебательной системы.***

**Б.** $\omega_1 = \omega$.

**Задача 7.** $x'' + 4x = \sin 2t$ (рис. 101 и 102).

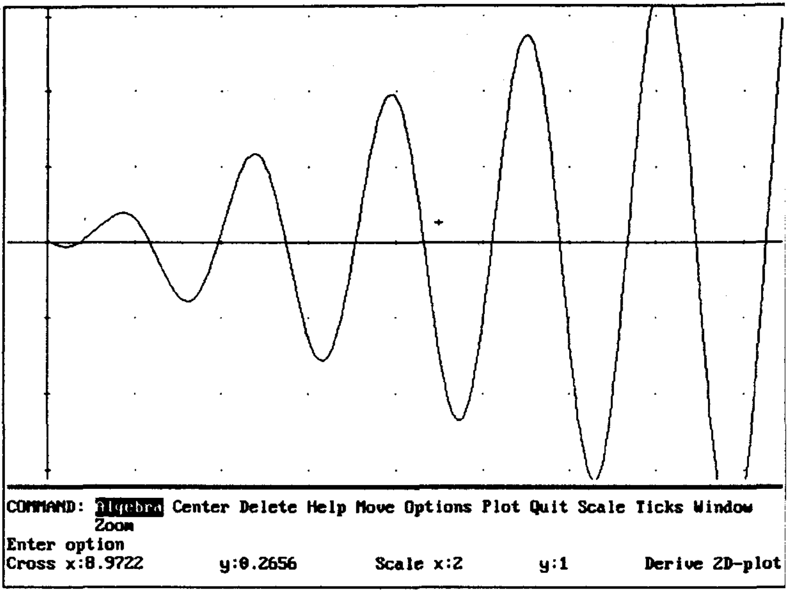



**Рис. 101**

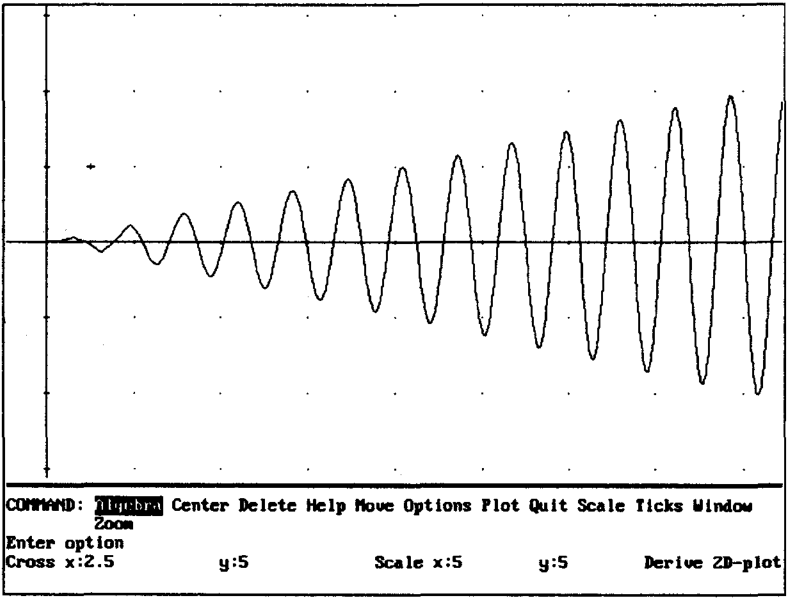



**Рис. 102**

Этот пример демонстрирует, что ***если частота вынуждающей силы совпадает с собственной частотой колебательной системы, при $t \to +\infty$ наблюдается неограниченное возрастание амплитуды.*** Это явление называется ***резонансом.*** На рис. 101 и 102 хорошо видно возрастание амплитуды с ростом $t$.

# ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

## Метод Эйлера

Пусть дана система двух линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}.$$

Уравнение $\Delta = \begin{vmatrix} a - w & b \\ c & d - w \end{vmatrix} = 0$ называется ***характеристическим уравнением данной системы.***

**1.** Пусть характеристическое уравнение имеет различные действительные решения $w_1$ и $w_2$.

Пусть $(u, v)$ – любое решение уравнение $(a - w_1)u + bv = 0$, а $(s, z)$ –любое решения уравнения $(a - w_2)\, s + bz = 0$. Тогда решение системы имеет вид:

$$x = Cue^{w_1 t} + Dse^{w_2 t},\ y = Cve^{w_1 t} + Dze^{w_2 t},$$

где $C$ и $D$ – произвольные постоянные.

Задачу нахождения решения данной системы в данном случае можно решить, например, так: введем функции

$$\mathbf{MATR}(a,b,c,d) := \begin{bmatrix} a\ b \\ c\ d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{RESH}(a,b,c,d) := \mathbf{EIGENVALUES}(\mathbf{MATR}(a,b,c,d))$$

$$\mathbf{MATR2}(a,b,c,d,w) := \mathbf{MATR2}(a,b,c,d) - w\mathbf{IDENTITY\_MATRIX}(2)$$

$$\mathbf{SIST\_UR1}(a,b,c,d,w,u,v) := \mathrm{MATR\,2}(a,b,c,d,w).\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{RESH\_SIST}\,(a,b,c,d,w,q) := \\ &[\mathrm{SOLVE}(\mathrm{ELEMENT}(\mathrm{SIST\_UR\,1}(a,b,c,d,w,u,v),1),v), \\ &\mathrm{SOLVE}(\mathrm{ELEMENT}(\mathrm{SIST\_UR\,1}(a,b,c,d,q,s,z),2),z)]\end{aligned}$$

$$\mathbf{RESH\_DIFS1}(w,q,u,v,s,z,t) := \left[x = cue^{wt} + dse^{qt}, y = cve^{wt} + dze^{qt}\right]$$

Функция **RESH** находит корни характеристического уравнения ($w$ и $q$). С помощью функции **RESH_SIST** находятся значения $u$, $v$, $s$, $z$. Функция **RESH_DIFS1** находит решение данной системы двух однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами в рассматриваемом случае. Функции **MATR**,**MATR2** и **SIST_UR1** – вспомогательные.

**2.** Если характеристическое уравнение $\Delta = 0$ имеет совпадающие действительные корни $w = w_1 = w_2$, то решение данной системы имеет вид:

$$x = (C + Dt)e^{wt},\ y = (S + zt)e^{wt},$$

где $C$ и $D$ – произвольные постоянные, $S$ и $Z$ определяются по формулам:

$$S = \frac{a_2(w - a_1) + b_2}{b_1},\ Z = \frac{D(w - a_1)}{b_1}.$$

Введем функции:

$$\mathbf{VS\_ZS}(a,b,w) := \left[s = \frac{c(w-a)+d}{b}, z = \frac{d(w-a)}{b}\right]$$

$$\mathbf{RESH\_DIFS2}(w,s,z) := \left[x = (c+dt)e^{ut}, y = (s+zt)e^{ut}\right]$$

Функция **VS_ZS** служит для нахождения значений $S$ и $Z$. Функция **RESH_DIFS2** находит решение системы в рассматриваемом случае.

## ЗАДАЧИ

Решить систему дифференциальных уравнений и сделать проверку.

**Задача 1.** $x_t' = 5x + 2y$, $y_t' = -4x - y$.

Р е ш е н и е.

1. **RESH**(5,2,–4,–1) ↲ S ↲. Результат: $w = 1, w = 3$.

2. **RESH_SIST**(5,2,–4,–1,1,3) ↲ S ↲. Результат: $v = -2u$, $z = -s$. Положим $u = 1$, $s = 1 \Rightarrow v = -2$, $z = -1$.

3. **RESH_DIFS1**(1,3,1,–2,1,–1) ↲ S ↲.

Результат: $\left[x = de^{3t} + ce^{t}, y = -de^{3t} - 2ce^{t}\right]$.

Ответ: $x = De^{3t} + Ce^{t}$, $y = -De^{3t} - 2Ce^{t}$.

**Задача 2.** $x_t' = x + y$, $y_t' = 4y - 2x$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Р е ш е н и е.

1. **RESH**(1,1,–2,4) ↲ S ↲. Результат: $w = 2, w = 3$.

2. **RESH_SIST**(1,1,–2,4,2,3) ↲ S ↲. Результат: $v = u$, $z = 2s$.

3. **RESH_DIFS1**(2,3,1,1,1,2) ↲ S ↲.

Результат: $\left[x = de^{3t} + ce^{2t}, y = 2de^{3t} + ce^{2t}\right]$.

4. Найдем значения $c$ и $d$, соответствующие заданным начальным условиям.

M S ↲c ↲d ↲x:=0 ↲y:=0 ↲t:=0 ↲. Результат: $[c = 1, d = -1]$.

5. В полученное решение системы подставим $c = 1$, $d = -1$. Результат: $\left[x = e^{2t} - e^{3t}, y = e^{2t} - 2e^{3t}\right]$.

Ответ: $x = e^{2t} - e^{3t}$, $y = e^{2t} - 2e^{3t}$.

**Задача 3.** $x'_t = 3x + y$, $y'_t = -x + y$.

Решение.

1. **RESH**(3,1,–1,1) ↲ S ↲. Результат: $w = 2$.
2. **VS_ZS**(3,1,–1,1,2) ↲ S ↲. Результат: $s = d - c, z = -d$.
3. **RESH_DIFS2**(2, $d-c$, $-d$) ↲ S ↲.

Результат: $\left[x = e^{2t}(c + dt), y = e^{2t}(2 - t)\right]$

Ответ: $\left[x = e^{2t}(C + Dt), y = e^{2t}(2 - t)\right]$

**Задача 4.** $x'_t = 8y - x$, $y'_t = x + y$.

**Задача 5.** $x'_t = 2x + y$, $y'_t = 4y - x$.

**Задача 6.** $x'_t = 2x + y$, $y'_t = 4y - x$.

**Задача 7.** $x'_t = 5x + 4y$, $y'_t = x + 2y$.

## Метод Даламбера

Пусть дана система линейных неоднородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = ax + by + u(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = cx + dy + v(t) \end{cases}.$$

Найдем значения $z$ – решения уравнения $z = \dfrac{b + zd}{a + zc}$.

1. Пусть корни уравнения $z_1$ и $z_2$ действительные и различные. Тогда решения системы можно найти в виде:

$$x + z_1 y = e^{(a+cz_1)t}\left(S + \int (u(t) + z_1 v(t)) e^{-(a+cz_1)t}\,\mathrm{d}t\right); \quad (1)$$

$$x + z_2 y = e^{(a+cz_2)t}\left(S + \int (u(t) + z_2 v(t)) e^{-(a+cz_2)t}\,\mathrm{d}t\right). \quad (2)$$

Выразим из этих равенств $x$ и $y$.

$x = \dfrac{gz_1 - fz_2}{z_1 - z_2}$, $y = \dfrac{f - g}{z_1 - z_2}$, где $f$ и $g$ – правые части равенств (1) и (2).

Введем функции:

$$\boxed{\mathrm{LAM}(a,b,c,d) := \mathrm{SOLVE}\left[z = \frac{b + zd}{a + zc}, z\right]}$$

$$\mathbf{VS\_RESH1}(a,b,c,d,u,v,z,s):=$$
$$\mathrm{EXP}((a+cz)t)(s+\int(u+vz)\mathrm{EXP}(-t(a+cz))dt)$$

$$\mathbf{RESH1\_NEODS}(a,b,c,d,u,v,z,s):=$$
$$x+zy=\mathrm{VS\_RESH1}(a,b,c,d,u,v,z,s)$$

$$\mathbf{RRESH\_NEODS}(a,b,c,d,u,v,z,w):=$$
$$[(w\mathrm{RESH1\_NEODS}(a,b,c,d,u,v,z,(w-z)s)-$$
$$z\mathrm{RESH1\_NEODS}(a,b,c,d,u,v,w,(w-z)r)/(w-z),$$
$$(\mathrm{RESH1\_NEODS}(a,b,c,d,u,v,z,(w-z)s)-$$
$$\mathrm{RESH1\_NEODS}(a,b,c,d,u,v,w,(w-z)r)/(z-w))]$$

2. Пусть корни уравнения действительные и равные. Тогда одно из решений системы находится по формуле (1). Из найденного равенства выразим $x$ и подставим во второе уравнение системы. Получим линейное уравнение, которое решим при помощи функции **LIN1_VS** (она введена в теме «Уравнение Риккати»).

Введем функции:

$$\mathbf{VS\_RESH2}(a,b,c,d,u,v,z,s):=$$
$$\mathrm{LIN1\_VS}(cz-d,v+c\,\mathrm{VS\_RESH1}(a,b,c,d,u,v,z,s),t)$$

$$\mathbf{RESH\_N\_S2}(a,b,c,d,u,v,z):=$$
$$[x=\mathrm{VS\_RESH1}(a,b,c,d,u,v,z,s)-z\,\mathrm{VS\_RESH1}(a,b,c,d,u,v,z,s),$$
$$y=\mathrm{VS\_RESH2}(a,b,c,d,u,v,z,r)]$$

## ЗАДАЧИ

Решить данные системы дифференциальных уравнений и сделать проверку.

**Задача 1**. $x_t'=3x+y+e^t$, $y_t'=x+3y-e^t$.

Решение.

1. **LAM**(3,1,1,3) ↵ S ↵. Результат: $z=-1$, $z=1$.

2. **RESH_NEODS** $(3,1,1,3,e^t,-e^t,-1,1)$ ↲ S ↲.

Результат: $\left[x = re^{4t} + se^{2t} - e^t, y = re^{4t} - se^{2t} + e^t\right]$.

Решите это уравнение также при помощи функции **RESU_NEODS2**, L ↲ $x$ ↲ $y$ ↲. Сравните результаты.

Ответ: $x = R\cdot e^{4t} + S\cdot e^{2t} - e^t$, $y = R\cdot e^{4t} - S\cdot e^{2t} + e^t$.

**Задача 2.** Однородные системы также можно решать методом Даламбера. Решим систему $x'_t = 5x + 2y$, $y'_t = -4x - y$ этим методом.

Решение.

1. LAM(5,2,–4,–1) ↲ S ↲. Результат: $z = 1$, $z = \frac{1}{2}$.

2. RESH_NEODS $(5,2,-4,-1,0,0,1,1/2)$ ↲ S ↲.

Результат: $\left[x = \frac{1}{2}se^t - re^{3t}, y = re^{3t} - se^t\right]$.

Это уравнение ранее мы решили методом Эйлера (задача 1). Там мы получили ответ: $\left[x = de^{3t} + ce^t, y = -de^{3t} - 2ce^t\right]$.

Ответы совпадают, так как $\dfrac{\frac{1}{2}s}{c} = \dfrac{-s}{-2c}$ и $\dfrac{-r}{d} = \dfrac{r}{-d}$.

Ответ: $x = \frac{1}{2}S\cdot e^t - R\cdot e^{3t}$, $y = R\cdot e^{3t} - S\cdot e^t$.

**Задача 3.** $x'_t = 2x + 4y + \cos t$, $y'_t = -x - 2y + \sin t$.

1. **LAM**(2,4,–1,–2) ↲ S ↲. Результат: $z = 2$.
2. **RESH_N_S2**(2,4,–1,–2, cos$t$,sin$t$,2) ↲ S ↲.

Результат: $[x = -2\cos t - 3\sin t - 2c + s(2t+1), y = 2\sin t + c - st]$.

**Задача 4.** $x'_t = 3x + y$, $y'_t = -x + y$.

1. **LAM**(3,1,–1,1) ↲ S ↲. Результат: 1.
2. **RESH_N_S2**(3,1,–1,1,0,0,1) ↲ S ↲.

Если продолжить решение задачи методом Эйлера, то или надо начать с самого начала, или можно ввести функцию

$$\boxed{\mathbf{VS\_ZS2}(a,b,c,d) := \mathrm{VS\_ZS}(a,b,(a+d)/2}$$

**VS_SZ2**(3,1,–1,1) ↲ S ↲. Результат: $[z = d - c, z = -d]$. Сравните с ранее полученными результатами (задача 3 в методе Эйлера). Далее воспользуйтесь функцией **RESH_DIFS2**.

**Задача 5.** $x'_t = 5x + 4y + e^t$, $y'_t = 4x + 5y + 1$.

**Задача 6.** $x'_t = 2x - 4y + 1$, $y'_t = -x + 5y$.

**Задача 7.** $x'_t + 2x + 4y = 1 + 4t$, $y'_t + x - y = \frac{3}{2}t^2$.

**Задача 8.** $x'_t = 2x + y + 2e^t$, $y'_t = x + 2y - 3e^{4t}$.

**Задача 9.** $x' = 3x + 2y + 3e^{2t}$, $y'_t = x + 2y + e^{2t}$.

**Задача 10.** $x'_t = 3x + 2y + e^t$, $y'_t = -6x - 4y + e^{2t}$.

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Система Derive имеет несколько встроенных комбинаторных функций.

**z!** – $z$ факториал.

**GAMMA (z)** – гамма-функция от $z$.

**PERM (*z*, *w*)** – число размещений из $z$ элементов по $w$ элементов.

**COMB (z, *w*)** – число сочетаний из $z$ элементов по $w$ элементов.

## Примеры

**1.** 5! ↲ S ↲. Результат: 120.

**2. PERM**(5, 3) ↲ S ↲. Результат: 60.
Вычислите также 5!/2! и сравните результаты.

**3. COMB**(5, 3) ↲ S ↲. Результат: 10.
Вычислите **PERM**(5,3)/3! и сравните результаты.

**4. COMB**(12, 5) ↲ S ↲. Результат: 792.

Вычислите $\frac{12!}{5!\,7!}$ и сравните результаты.

Начиная с версии 2.6 имеется встроенная функция **RANDOM: RANDOM (*n*)** — если $n > 1$, то случайное целое в интервале $[0, n]$, если $n = 1$, то случайное число в интервале $[0, 1]$, если $n < 1$, то устанавливается текущее значение $n$ генератора случайных чисел, если $n = 0$, то устанавливается значение генератора случайных чисел по текущему времени.

## Формула Бернулли

Пусть производятся $n$ независимых опытов, в каждом из которых некоторое событие $A$ появляется с вероятностью $p$. Тогда вероятность появления события $m$ раз в $n$ независимых опытах вычисляется по формуле:

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, m = \overline{0,n}$$

Введем функцию

$$\boxed{\mathbf{FORM\_BERN}(p,m,n) := \mathrm{COMB}(n,m)p^m(1-p)^{n-m}}$$

Здесь $p$, $m$, $n$ носят тот же смысл, что и в самой формуле.

### ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Производятся 10 независимых опытов, в каждом из которых событие $A$ появляется с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что событие появится 4 раза.

Решение.
$n = 10$, $m = 4$, $p = 0.2$.
**FORM_BERN** (0.2,4,10) ↲ X ↲. Результат: 0.0880.
Ответ: 0.0880.

## Законы распределения дискретных случайных величин

***Случайной величиной*** называется величина, которая в результате опыта принимает одно из своих возможных значений, заранее неизвестно, какое именно.

***Законом распределения случайной величины*** называется любое правило, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Случайная величина называется ***дискретной***, если она имеет конечное или бесконечное счетное число возможных значений.

Закон распределения дискретной случайной величины можно задать в виде ***таблицы распределения***:

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_i = P(x = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

Сумма всех вероятностей таблицы равна единице: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Закон распределения случайной величины характеризует числа, которые называются ***числовыми характеристиками*** случайной величины. Важнейшими из них являются математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

***Математическое ожидание*** дискретной случайной величины $X$ вычисляется по формуле:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

***Дисперсия*** дискретной случайной величины $X$ может быть вычислена по любой из двух формул:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i,\ D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - M^2(X).$$

***Среднее квадратическое отклонение*** случайной величины вычисляется по формуле: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

## Биномиальное распределение

Пусть производятся $n$ независимых опытов, $p$ – вероятность появления некоторого события $A$ в каждом из опытов, случайная величина $X$ – число появлений события $A$ в $n$ независимых опытах. Тогда $P_n(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$. Математическое ожидание этой случайной величины находится по формуле $M(X) = np$, дисперсия – $D(X) = npq$.

Этот закон распределения называется ***биномиальным распределением.***

Введем функцию

$$\mathbf{BIN\_TAB}(p,n) := \mathrm{VECTOR}\left(\left[k, \mathrm{COMB}(n,k)\, p^k (1-p)^{n-k}\right], k, 0, n\right)$$

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Производятся 10 независимых опытов, в каждом из которых событие $A$ появляется с вероятностью 0,2. Составьте таблицу распределения для числа появлений события. Сделайте проверку. Найдите математическое ожидание и дисперсию.

Решение.

Пусть случайная величина $X$ – число появлений события в 10 независимых опытах. Она распределена по биномиальному закону. $N = 10$, $p = 0.2$.

BIN_TAB(0.2,10) ↵ X ↵

Мы знаем, что сумма всех вероятностей, входящих в таблицу, должна равняться единице. Введем функцию для проверки этого факта.

$$\mathbf{PROV\_BIN}(p,n) := \sum_{m=0}^{n} \mathrm{FORM\_BERN}(p,m,n)$$

Сделаем проверку для данного случая.

**PROV_BIN**(0.2, 10) ↵ S ↵. Результат: 1, что и требовалось показать.

Заметьте, что вероятности в таблице сначала возрастают, затем убывают. Наибольшее значение вероятность достигает при $m = 2$ (оно стоит на третьем месте, так как первое число в таблице есть $P_{10}(0)$. То есть наиболее вероятно, что будет 2 попадания).

Не случайно, что вероятность сначала возрастает, достигает своего наибольшего значения, а затем убывает. Будем рассматривать вероятность $P_n(m)$ как функцию целочисленного аргумента. Нетрудно доказать, что с ростом $m$ функция $P_n(m)$ сначала возрастает, достигает своего наибольшего значения, затем убывает. Значение $m = m_0$, при котором функция $P_n(m)$ достигает своего наибольшего значения, называется ***наивероятнейшим числом исходов.***

$$m_0 \in [np - q; np + q], \text{ где } q = 1 - p.$$

В рассмотренном примере $np - q = 2 - (1 - 0{,}2) = 1{,}2$. Следовательно, $m_0 = 2$.

**Задача 2.** Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,6. Найдите наивероятнейшее число попаданий в мишень при 9 выстрелах и соответствующую вероятность.

Постройте таблицу распределения для числа попаданий в мишень и убедитесь в том, что $m_0$ нашли правильно.

Решение.

$np - q = 9 \cdot 0,6 - 0,4 = 5$. Следовательно, вероятность $P_9(m)$ достигает своего наибольшего значения при $m_{0_1} = 5$ и при $m_{0_2} = 6$.

**FORM_BERN**(0.6,5,9) ↲ X ↲. Результат: 0.2508.

**FORM_BERN**(0.6,6,9) ↲ X ↲. Результат: 0.2508.

Постройте таблицу распределения и сделайте проверку.

**Задача 3.** Рабочий обслуживает 20 станков-автоматов. Вероятность того, что в течение смены станок потребует наладки, равна 0,3:

а) найдите вероятность, что в течение смены рабочему придется налаживать не более 2 станков;

б) найдите наивероятнейшее число станков, которые потребуют наладки в течение смены и соответствующую вероятность;

в) составьте таблицу распределения для числа станков, которые потребуют в течение смены наладки, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

## Геометрическое распределение

Пусть производятся независимые опыты, в каждом из которых событие $A$ появляется с вероятностью $p$. Опыты прекращаются после появления события $A$. Пусть случайная величина $X$ – число произведенных опытов. Тогда вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение $m$, то есть вероятность того, что событие появится в $m$-м опыте, находится по формуле:

$$P(X = m) = (1 - p)^{m-1} p, m = 1,2,3,...$$

Говорят, что случайная величина $X$ распределена ***по геометрическому закону***.

Введем функции

$$\boxed{\mathbf{GEOM}(p,m) := (1-p)^{m-1}p}$$

$$\boxed{\mathbf{GEOM\_RAS}(p,k) := \mathbf{VECTOR}(\mathbf{GEOM}(p,m), m, 1, k)}$$

Функция **GEOM_RAS** находит первые $k$ чисел таблицы распределения случайной величины, распределенной по геометрическому закону.

**Задача**

Производятся независимые опыты, в каждом из которых событие $A$ появляется с вероятностью 0,2, причем опыты прекращаются после появления события $A$.

а) составьте таблицу распределения для числа опытов $m$ при $m = \overline{1,4}$;

б) найдите вероятность того, что будет произведено не более четырех опытов.

Решение.

Случайная величина $X$ – число произведенных опытов. Она распределена по геометрическому закону.

а) **GEOM_RAS**(0.2,4) ↵ S ↵. Результат: $\left[\frac{1}{5}, \frac{4}{25}, \frac{16}{125}, \frac{64}{125}\right]$.

Следовательно, $P(X = 1) = \frac{1}{5}$, $P(X = 2) = \frac{4}{25}$, $P(X = 3) = \frac{16}{125}$, $P(X = 4) = \frac{64}{125}$.

б) требуется найти вероятность того, что будет произведен один опыт или два опыта, или три опыта, или четыре опыта, то есть надо найти вероятность суммы событий. Так как события несовместны, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Можно воспользоваться функцией SUM.

**SUM**(**GEOM**(0.2,$m$),$m$,1,4) ↵ S ↵.

Результат: $\frac{369}{625} \approx 0{,}5904$.

*Замечание*. Если надо решить несколько подобных задач, можно ввести функцию, решающую эти задачи. Сделайте это самостоятельно.

## Распределение Пуассона

Пусть выполняются условия, при которых применима формула Бернулли. Если $np \approx np(1-p)$, т.е. когда точным распределением случайной величины $X$ – числа появлений события в $n$ независимых испытаниях является биномиальное распределение, и математическое ожидание и дисперсия близки друг к другу, то вместо биномиального распределения можно использовать ***распределение Пуассона.***

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad M(X) = D(X) = \lambda .$$

Введем функции:

$$\boxed{\mathbf{PUAS\_RAS}(m,k) := \frac{m^k}{k!}\mathrm{EXP}(-m)}$$

$$\boxed{\mathbf{PUAS\_TAB}(m,k) := \mathrm{VECTOR}\left(\frac{m^i}{i!}\mathrm{EXP}(-m), i, 0, k\right)}$$

$$\boxed{\mathbf{PUAS\_VER}(m,n) := \sum_{i=1}^{n+1}\mathrm{ELEMENT}(\mathrm{PUAS\_TAB}(m,n), i)}$$

Функция **PUAS_TAB** находит первые $m$ чисел таблицы распределения случайной величины, распределенной по закону Пуассона, функция **PUAS_VER** – сумму вероятностей этой таблицы.

## ЗАДАЧИ

Решить задачи 1–4, считая, что рассматриваемые в них случайные величины распределены по закону Пуассона.

**Задача 1.** Среднее число вызовов, поступающих на АТС в минуту, равно 120. Найти вероятности следующих событий: $A$ – за две секунды на АТС не поступит ни одного вызова, $B$ – за две секунды на АТС поступит не более двух вызовов, $C$ – за одну секунду на АТС поступят ровно три вызова, $D$ – за три секунды на АТС поступит не менее трех вызовов.

Решение.

1. Пусть случайная величина $X$ – число вызовов на АТС за две секунды. $A = \{X = 0\}$. Найдем вероятность события $A$. Определим $\lambda$ – среднее число вызовов на АТС за две секунды: $\lambda = \dfrac{120}{60} \cdot 2 = 4$.

**PUAS_RAS**(4,0) ↵ X ↵. Результат: 0.0183.

2. Найдем вероятность события $B$. $B = \{X \le 2\}$. Требуется найти вероятность того, что за две секунды на АТС не поступит ни одного вызова или поступит ровно один вызов, или поступят ровно два вызова, то есть надо найти сумму вероятностей первых трех вероятностей таблицы распределения случайной величины $Y$. Эту задачу решает функция **PUAS_VER**.

**PUAS_VER**(4,2) ↵ S ↵. Результат: 0.2381.

3. Пусть случайная величина $Y$ – число вызовов на АТС за одну секунду. Найдем вероятность события $C$. $C = \{Y = 3\}$. Эту задачу решает функция **PUAS_RAS**. Определим $\lambda$ — среднее число вызовов на АТС за одну секунду: $\lambda = \dfrac{120}{60} = 2$ (или предыдущее значение разделить на 2).

**PUAS_RAS**(2, 3) ↵ X ↵. Результат: 0.180.

4. Пусть случайная величина $Z$ – число вызовов на АТС за три секунды. Тогда $\lambda = \dfrac{120}{60} \cdot 3 = 6$. Найдем вероятность события $D$. $D = \{Z \ge 3\}$. Введем событие, противоположное событию $D$. $\overline{D}$ – за три секунды на АТС поступит менее трех вызовов. $\overline{D} = \{Z < 3\}$. Воспользуемся тем, что $P(D) = P(\overline{D}) = 1 - P(D)$.

1–**PUAS_VER**(6,2) ↵ X ↵. Результат: 0.938.

Ответ: $P(A) = 0.0183$, $P(B) = 0.2381$, $P(C) = 0.180$, $P(D) = 0.938$.

**Задача 2.** Аппаратура состоит из 1000 элементов, каждый из которых независимо от остальных выходит из строя за время $T$ с вероятностью $p = 5 \cdot 10^{-4}$. Найти вероятности следующих событий: $A$ — за время $T$ откажут ровно 3 элемента, $B$ — за время $T$ откажет хотя бы один элемент, $C$ — за время $T$ откажут не более трех элементов.

Решение.

1. Пусть случайная величина $X$ – число элементов, которые выходят из строя за время $T$. Эта случайная величина распределена по закону Пуассона. Найдем параметр распределения: $\lambda = np = 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 1/2$.

2. Найдем $P(A)$. **PUAS_RAS**(1/2,3) ↵ X ↵.

Результат: 0.0126.

3. Найдем $P(B)$. 1 – **PUAS_RAS**(1/2,0) ↵ X ↵.

Результат: 0.3935.

4. Найдем $P(C)$. **PUAS_VER**(1/2,3) ↵ X ↵.

Результат: 0.9982.

Ответ: $P(A) = 0.0126$, $P(B) = 0.3935$, $P(C) = 0.9982$.

**Задача 3.** Корректура из 500 страниц содержит 1300 опечаток. Найти наиболее вероятное число опечаток на одной странице текста и вероятность этого числа.

Решение.

Пусть случайная величина $X$ – число опечаток на одной странице текста, она распределена по закону Пуассона. Найдем ее параметр – среднее число опечаток на странице текста: $\lambda = 1300/500 = 2.6$.

*1-й способ*. Найдем несколько первых вероятностей таблицы распределения данной случайной величины:

**PUAS_TAB**(2.6,6) ↵ X ↵

Мы видим, что сначала вероятности возрастают, а затем убывают, мы знаем, что они и дальше будут убывать, наибольшая вероятность стоит на третьем месте, то есть наибольшая вероятность $P(X = 2)$. Таким образом, наиболее вероятное число событий равно 2.

*2-й способ*. Нам известно, что наивероятнейшее число событий $m_0 \in [np - q; np + q]$, где $q = 1 - p$. Найдем вероятность события $p$. Так как $np = \lambda$, то $500p = 2{,}6 \Rightarrow p = 0{,}052 \Rightarrow np - q = 2{,}6 \Rightarrow 2{,}6 - (1 - 0{,}052) \approx 1.6 \Rightarrow m_0 = 2$.

Ответ: $m_0 = 2$.

**Задача 4.** На факультете обучается 500 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно для $k$ студентов данного факультета? Вычислить указанную вероятность для $k = 0, 1, 2, 3$.

Р е ш е н и е.

Пусть случайная величина $X$ – число студентов среди данных 500, родившихся 1 сентября. Вероятность того, что человек родился 1 сентября, равна 1/365. Следовательно, среднее число родившихся 1 сентября среди 500 человек равно $500/365 \approx 1.36986$. Поставленную задачу решает функция **PUAS_TAB**.

**PUAS_TAB**(1.36986,3) ↵ $X$ ↵.

Результат: [0.2541, 0.3481, 0.2385, 0.1089].

Ответ: $P(X = 0) = 0.2541$, $P(X = 1) = 0.3481$, $P(X = 2) = 0.2385$, $P(X = 3) = 0.1089$.

## Гипергеометрическое распределение

Пусть в урне имеются $n$ шаров, $m$ из которых белые, остальные черные. Из них наудачу выбирают $S$ шаров. Случайная величина X – число белых шаров среди отобранных. Тогда вероятность того, что случайная величина примет значение $k$, то есть того, что среди выбранных шаров $k$ белых, определяется по формуле:

$$P(X = k) = \frac{C_m^k C_{n-m}^{s-k}}{C_n^s}.$$

В таком случае говорят, что случайная величина $X$ распределена по ***гипергеометрическому закону***.

Введем функции

$$\mathbf{GIPER}(n,m,s,k) := \frac{\mathrm{COMB}(m,k)\mathrm{COMB}(n-m,s-k)}{\mathrm{COMB}(n,s)}$$

$$\mathbf{GIPER\_RAS}(n,m,s) := \mathbf{VECTOR}(\mathbf{GIPER}(n,m,s,k),k,0,s)$$

**Задача.** Имеются 7 шаров, из них 4 белые. Наудачу выбираются 3 шара. Построить таблицу распределения числа белых шаров среди отобранных.

Решение.

**GIP_RAS**(7,4,3) ↵ S ↵. Результат: $\left[\frac{1}{35},\frac{12}{35},\frac{18}{35},\frac{4}{35}\right]$.

Для проверки введем функцию

$$\boxed{\mathbf{PROV\_GIPER}(n,m,s):=\sum_{k=0}^{m}\mathrm{GIPER}(n,m,s,k)}$$

В данном случае:
**PROV_GIPER**(7,4,3) ↵ S ↵. Результат: 1.

> ***Замечание.*** Конечно, проверку можно делать и для каждого случая, не вводя общей функции. В этой задаче **SUM**(ELEMENT(GIP_RAS(7,4,3),$k$),$k$,1,4) ↵ S ↵. Результат: 1, что и требовалось показать.

Для функций-проверок можно использовать и функции-таблицы: для биномиального распределения **BIN_TAB**, для гипергеометрического **GIPER_RAS**. При этом придется использовать функцию **ELEMENT**.

## Законы распределения непрерывных случайных величин

***Функцией распределения*** $F(x)$ случайной величины $X$ называется вероятность того, что в результате опыта случайная величина $X$ примет значение, меньшее $x$.

$$F(x)\overset{def}{=}P(X<x).$$

Случайная величина $X$ называется ***непрерывной***, если производная ее функции распределения $F'(x)$ всюду непрерывна за исключением, может быть, конечного числа точек, в которых функция $F(x)$ непрерывна.

Непрерывную случайную величину обычно задают, задавая ее ***плотность*** $f(x)$.

$$f(x)=F'(x). \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx.$$

Плотность обладает следующими свойствами:

$$1)\ \forall x: f(x) \geq 0; \qquad 2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

График плотности называется ***кривой распределения*** данной случайной величины. Из первого свойства плотности следует, что кривая распределения лежит в верхней полуплоскости.

***Вероятность попадания случайной величины на полуинтервал*** $[\alpha; \beta)$ вычисляется по формуле:

$$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

***Вероятность попадания непрерывной случайной величины в точку*** равна нулю, следовательно, для непрерывной случайной величины

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha),$$

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Из второго равенства следует, что ***геометрический смысл вероятности*** $P(a < X < b)$ состоит в том, что эта вероятность есть площадь фигуры, ограниченной сверху кривой распределения, снизу отрезком $[a, b]$ оси абсцисс, по бокам – прямыми $x = a$, $x = b$. Из второго свойства плотности следует, что ***площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице.***

***Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины*** вычисляются по формулам:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x - M^2(X).$$

(если интегралы сходятся).

## Нормальный закон распределения

***Нормальной*** называется непрерывная случайная величина с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \ \sigma > 0.$$

График этой функции называют ***кривой Гаусса***.

Можно доказать, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, $M(x) = m$, $D(x) = \sigma^2$.

Вероятность попадания нормальной случайной величины на интервал вычисляется по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right), \text{где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Система имеет несколько встроенных функций, тесно связанных с нормальным распределением:

**ERF (*z*)** – функция ошибок;

**ERF (*z*, *w*)** – обобщенная функция ошибок;

**ERFC (*z*)** – дополнительная функция ошибок;

**NORMAL (*z*, *m*, *s*)** – нормальное распределение с математическим ожиданием $m$ и средним квадратическим отклонением $s$;

**NORMAL (*z*)** – интегральное распределение по $z$.

Введем функции

$$\mathbf{VER\_NOR}(a,b,m,s) := \mathrm{NORMAL}(b,m,s) - \mathrm{NORMAL}(a,m,s)$$

Эта функция определяет вероятность попадания нормальной случайной величины на интервал ($a$; $b$). Здесь $s$ играет роль $\sigma$.

$$\mathbf{TABVER\_NOR}(u,m,s) :=$$
$$\mathrm{VECTOR}(\mathrm{VER\_NOR}(\mathrm{EL}(u,k-1),\mathrm{EL}(u,k),m,s),k,2,\mathrm{DIM}(u))$$

В этой функции **EL** заменяет **ELEMENT**, а **DIM** заменяет **DIMENSION**, что сделано ради сокращения записи. При вводе эти функции надо писать полностью.

$$\boxed{\mathbf{PL\_NOR\_T}(m,s):=\frac{\mathrm{EXP}\left(-\frac{(x-m)^2}{2s^2}\right)}{s\sqrt{2\pi}}}$$

Функция **PL_NOR_T** определяет плотность нормальной случайной величины с математическим ожиданием $m$ и средним квадратическим отклонением $s$.

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Для нормальной случайной величины с $M(X)=10$ и $\sigma(X)=2$ найдите вероятность того, что в результате опыта случайная величина примет значение из интервала: а) (12;14); б) $(m-\sigma;m+\sigma)$, $(m-2\sigma;m+2\sigma)$, $(m-3\sigma;m+3\sigma)$, где $m=M(X)$, $\sigma=\sigma(X)$. Постройте кривую распределения и выделите участки оси абсцисс $[m-\sigma;m+\sigma]$, $[m-2\sigma;m+2\sigma]$, $[m-3\sigma;m+3\sigma]$.

Решение.

а)

**VER_NOR**(12,14,10,2) ↵ S ↵.

Результат: $-\dfrac{\mathrm{ERF}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]-\mathrm{ERF}\left(\sqrt{2}\right)}{2}$ X ↵.

Результат: 0.1359.

б)

1) найдите искомые вероятности. Как и следовало ожидать, чем больше интервал, в который попадает случайная величина, тем больше вероятность попадания ее в интервал. Вы видите, что вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала $(m-3\sigma; m+3\sigma)$, близка к единице. То есть практически достоверно, что случайная величина в результате опыта примет значение из этого интервала;

2) найдите плотность данной случайной величины

**PL_NOR_T**(10,2) ↵ S ↵. Результат: $\dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{\pi}}e^{-x^2/8+5x/2-25/2}$

3) постройте график этой функции и полосы $[x, m - \sigma]$, $[x, m + \sigma]$, $[x, m - 2\sigma]$, ..., $[x, m + 3\sigma]$. Перед построением кривой расределения установите **Scale** x:2, y:0.05, установите указатель «+» в точку (10,0): так как $M(X) = 10$, кривая распределения симметрична относительно прямой $x = 10$, центрируйте рисунок (**C**). Зрительно сравните площади фигур, ограниченных этими отрезками, осью абсцисс и кривой распределения.

*Замечание*. Для облегчения процесса построения рисунка можно ввести функции. Назовем их, например, **OD_SIG**, **DVA_SIG**, **TRI_SIG** (одна сигма, две сигмы, три сигмы).

$$\mathbf{OD\_SIG}(m,s) := \begin{bmatrix} m - s & y \\ m + s & z \end{bmatrix} \qquad \mathbf{DVA\_SIG}(m,s) := \begin{bmatrix} m - 2s & y \\ m + 2s & z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{TRI\_SIG}(m,s) := \begin{bmatrix} m - 3s & y \\ m + 3s & z \end{bmatrix}$$

**OD_SIG**(10,2) ↵ S ↵. Результат: $\begin{bmatrix} 8y \\ 12z \end{bmatrix}$.

Постройте отрезки прямых $x = 8$, $x = 12$. Курсор поля алгебры должен быть установлен на последнем результате. Нажмите на клавишу **P** два раза, укажите пределы изменения от 0 до 1 и нажмите клавишу ввода два раза: **P P** < *пределы от 0 до 1* > ↵ ↵. Будут построены два отрезка прямых.

Аналогично воспользуйтесь функциями **DVA_SIG**, **TRI_SIG**.

**Задача 2.** Постройте кривые Гаусса при $m = 4$, $\sigma = 1/2$ и при $m = 4$, $\sigma = 1/4$. Сделайте вывод о влиянии $\sigma$ на вид кривой распределения. Чем объясняется такое поведение графика плотности? (рис. 103).

**Задача 3.** Считается, что изделие высшего сорта, если отклонение его размера от номинала не превосходит по абсолютной величине 3,6 мм. Случайные отклонения от номи-

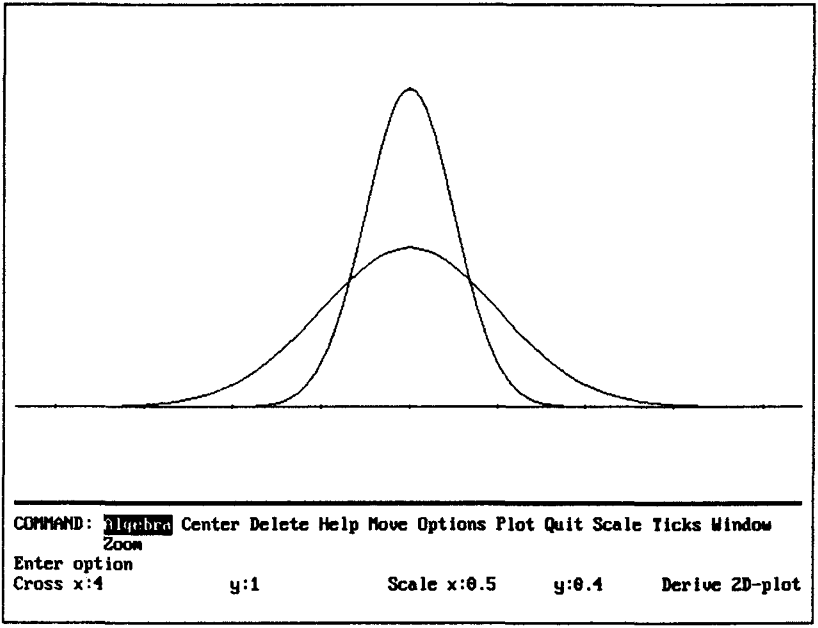



**Рис. 103**

нала подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 3 мм. Систематические отклонения отсутствуют. Определить среднее число изделий высшего качества, если изготавливаются 100 изделий.

Р е ш е н и е.

Пусть случайная величина $X$ – отклонение размера изделия от номинала. По условию она распределена по нормальному закону. Систематические отклонения отсутствуют, следовательно, $M(X) = 0$. Пусть случайная величина $Y$ – число изделий высшего сорта среди 100 изделий. Она распределена по биномиальному закону. Требуется найти математическое ожидание случайной величины $Y$.

$$M(Y) = np = 100p\text{, где } p = P(|X| < 3{,}6).$$

Найдите $100P(|X| < 3{,}6)$, то есть вероятность $100P(-3{,}6 < X < 3{,}6)$.

Ответ: 77.

## Связь между биномиальным и нормальным распределениями

Известно, что ***с ростом числа опытов n биномиальный закон распределения неограниченно приближается к нормальному***. Убедимся в этом на примере.

Пусть производятся $n$ независимых опытов, вероятность появления некоторого события в каждом из опытов равна 0,2. Пусть $X$ – число появлений события в этих $n$ опытах. Найдем математическое ожидание $M(X)$ случайной величины $X$ и ее дисперсию $D(X)$, построим таблицу ее распределения и график плотности нормальной случайной величины (кривую Гаусса), где $m = M(X)$, $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

1. Пусть $n = 40$. Тогда $M(X) = np = 8$, $D(X) = npq = 6.4$.

2. Найдем плотность нормальной случайной величины с $m = 8$, $\sigma = \sqrt{6.4}$.

**PL_NOR_T**$(8, \sqrt{6.4})$ ↵ X ↵.

Результат: $0.315391e^{-0.3125x^2+2.5x-5}$.

3. Построим таблицу распределения случайной величины $X$.

**BIN_TAB**(0.2,40) ↵ X ↵.

4. Построим точки и кривую Гаусса. В данном случае придется ввести разный масштаб по осям. Установите **Scale** x:5 y:0.1. Установите курсор на таблицу и дважды нажмите на клавишу **P**. Центрируйте рисунок: **M** x: = 8 (так как $m = 8$) **C**. Проделайте эти операции при $n = 20$, $n = 50$, $n = 100$. Вы видите, что при $n = 20$ большая часть точек довольно далеко от кривой, в то время как при $n = 100$ практически все точки лежат на кривой. Эти рисунки демонстрируют то, что с ростом числа опытов биномиальный закон распределения неограниченно приближается к нормальному.

На приведенных рис. 104 ($n = 40$) и 105 ($n = 100$) очень хорошо видно, что с ростом числа опытов биномиальное распределение приближается к нормальному: на рис. 105 точки практически лежат на кривой Гаусса.

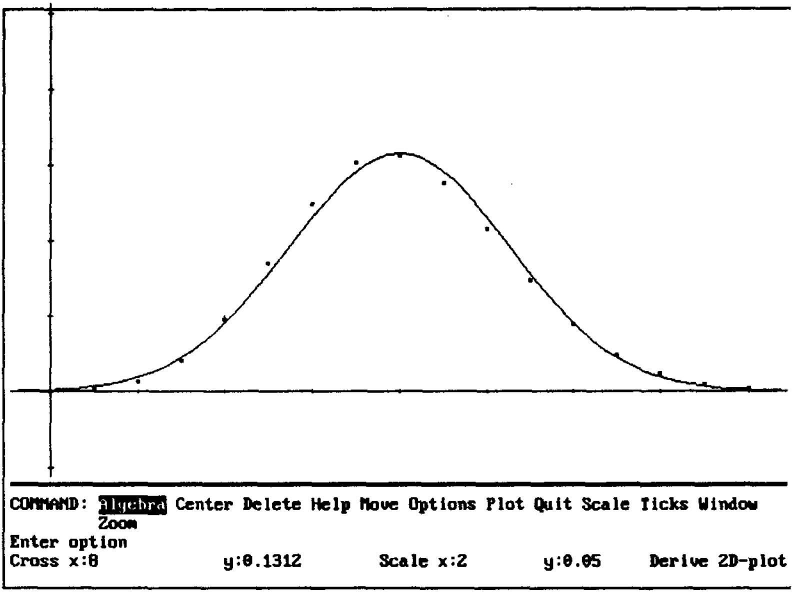



**Рис. 104**

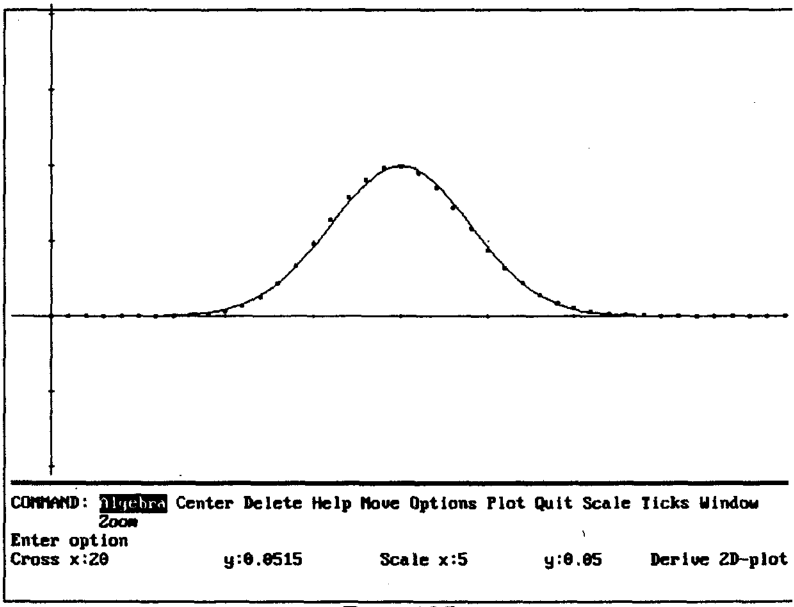



**Рис. 105**

## Показательное распределение

Показательным распределением называется распределение непрерывной случайной величины, заданной плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \text{если } x > 0 \\ 0, \quad \text{если } x \le 0 \end{cases}, \ \lambda > 0. \ M(x) = \frac{1}{\lambda}, D(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Функция распределения показательного закона имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, \ \text{если } x \ge 0, \\ 0, \quad \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Вероятность того, что случайная величина, распределенная по показательному закону, попадет на интервал $(\alpha;\beta)$, определяется по формуле $P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$.

Показательное распределение имеют такие случайные величины, как ***время работы радиолампы***, ***время распада радиоактивного атома***, ***время обслуживания технической системы***, ***длительность телефонного разговора*** и т.д.

Введите самостоятельно функции для нахождения плотности, функции распределения случайной величины, распределенной по показательному закону, функцию для определения вероятности попадания этой случайной величины на интервал $(\alpha;\beta)$.

### ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Постройте графики плотности и функции распределения случайной величины, заданной по показательному закону, задавая различные значения $\lambda$.

**Задача 2.** Время $T$ обнаружения цели радиолокатором распределено по показательному закону. Найти вероятность того, что цель будет обнаружена за время от 5 до 15 с после начала поиска, если среднее время обнаружения цели равно 10 с.

Ответ: 0,383.

**Задача 3.** Время $T$ безотказной работы радиотехнической системы распределено по показательному закону. Интенсивность отказов системы $\lambda = 0{,}02$. Найти среднее время безотказной работы и вероятность безотказной работы за 80 ч.

**Задача 4.** Длительность времени безотказной работы каждого из четырех элементов, входящих в техническое устройство, имеет показательное распределение. Среднее время безотказной работы для каждого элемента равно 500 ч. Техническое устройство работает при условии безотказной работы всех четырех элементов. Определить вероятность безотказной работы устройства в течение не менее 600 ч, если время безотказной работы каждого элемента не зависит от времени работы трех других элементов.

## Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина $X$ имеет ***равномерное распределение*** на отрезке $[a; b]$, если ее плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{если} \quad a \le x \le b, \\ 0, & \text{если} \quad x < a \quad \text{или} \quad x > b. \end{cases}$$

### ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины, заданной по равномерному закону.

**Задача 2.** Определите вероятность того, что случайная величина, заданная по равномерному закону, примет значение из интервала $(m - 3\sigma; m + 3\sigma)$.

**Задача 3.** Цена деления вольтметра 10В. Отсчет производится с округлением до целого деления шкалы. Определить среднеквадратическую ошибку округления $\sigma$ при измерении и вероятность того, что ошибка заключена в пределах (–2В; 2В).

**Задача 4.** Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 8 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередного автобуса менее 3 мин.

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Система Derive содержит несколько статистических функций:

**AVERAGE**$(z_1,\ldots,z_n)$ – среднее арифметическое чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$;

**RMS**$(z_1,\ldots,z_n)$ – среднее геометрическое чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$;

**VAR**$(z_1,\ldots,z_n)$ – дисперсия;

**STDEV**$(z_1,\ldots,z_n)$ – среднее квадратическое отклонение;

**FIT**($v$,A) – многомерная линейная регрессия вектора $v$, задающего аргументы и функцию по матрице данных A.

## Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов часто применяют при обработке наблюдений, для приближенного представления функции другими, более простыми функциями.

С сутью метода наименьших квадратов можно познакомиться по учебникам (см., например, Солодовников А. С. Теория вероятностей. — М.: Просвещение, 1983) или задачникам (например, [7]).

Встроенная функция **FIT** служит для определения функции в виде многочлена.

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Известно, что величина $Y$ зависит от величины $X$. С целью изучения этой зависимости провели опыты, результаты которых приведены в таблице. Предполагая, что $y(x)$ — многочлен $n$-го порядка, найти этот многочлен при: а) $n = 1$, б) $n = 2$, в) $n = 3$.

| $x_i$ | –4 | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | –2,41 | –1,52 | –0,98 | 0,20 | 0,97 | 1,57 | 2,34 | 3,48 | 4,88 |

Р е ш е н и е.

а) *1-й способ.*

$y =$ **FIT**[[$x$, $ax + b$], [–4,–2.41], [–3,–1.52], [–2,–0.98], [–1,0.20], [0,0.97],1,1.57], [2,2.34], [3,3.48], [4,4.88]] ↵ S ↵

Результат: $y = \dfrac{1739x}{2000} + \dfrac{853}{900}$.

*2-й способ.*

1. Можно предварительно обозначить матрицу, например, через $m$.

$m$:=[[$x$,$ax+b$],[–4,–2.41],[–3,–1.52],[–2,–0.98], [–1,0.20],[0,0.97],1,1.57], [2,2.34], [3,3.48], [4,4.88]]

2. $y =$ **FIT**( $m$) ↵ S ↵ . Результат тот же.

Построим рисунок – точки, результаты опытов и полученную прямую. Для построения опытных точек можно выделять каждую точку и строить ее отдельно так, как строим график. Можно задать результаты опыта в виде матрицы:
[[–4,–2.41], [–3,–1.52], [–2,–0.98], [–1,0.20], [0,0.97], [1,1.57], [2,2.34], [3,3.48], [4,4.88]]
и построить сразу все точки, нажав дважды на клавишу P.

б) Действия такие же, только в матрице $m$ на первом месте после первой квадратной скобки должно быть [$x$, $ax^2 + bx + c$].

Результат: $y = \dfrac{888x^2}{36451} + \dfrac{1739x}{2000} + \dfrac{9071}{11550}$. Постройте рисунок.

**Задача 2.** Решите задачу, аналогичную задаче 1, при $n = \overline{1{,}6}$. Результаты наблюдений приведены в таблице.

| $x_i$ | –5 | –4 | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2,78 | 3,56 | 4,51 | 2,45 | 1,02 | –0,98 | –2,45 | –4,34 | –7,34 |

На рис. 106, 107, 108 приведены решения аналогичной задачи. По ним мы видим, что с ростом порядка многочлена график этого многочлена становится ближе к опытным точкам.

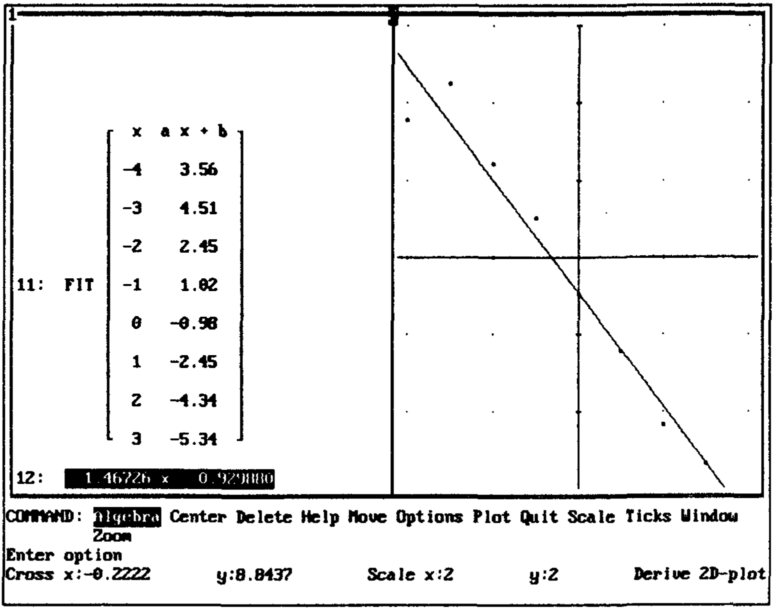



Рис. 106

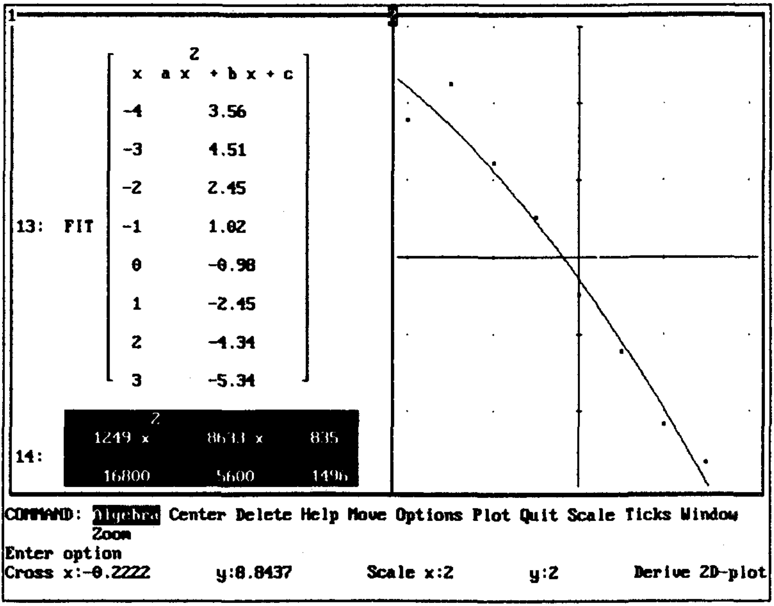



Рис. 107

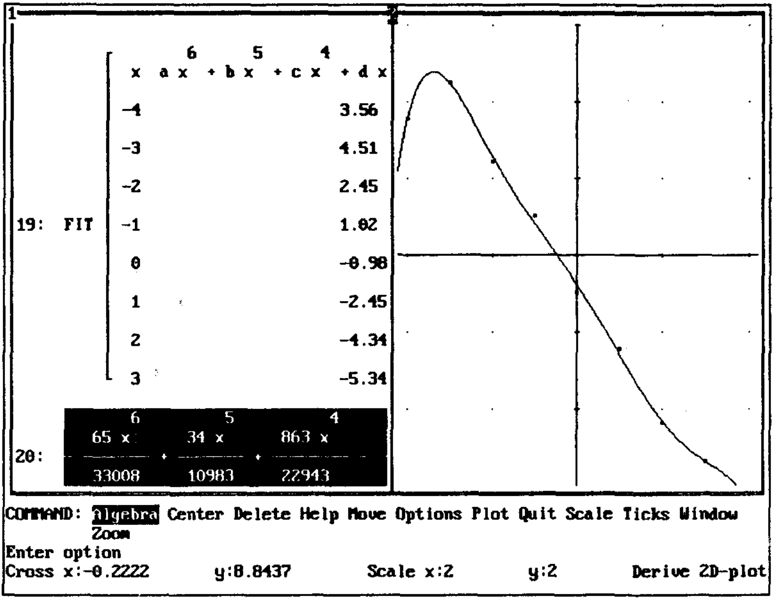



**Рис. 108**

## Линейная корреляция

Случайные величины $X$ и $Y$ находятся в корреляционной зависимости, если каждому значению одной из них соответствует некоторое распределение другой.

Выборочные уравнения прямых регрессии имеют вид:

$$x-\bar{x}=\frac{\bar{k}}{s_2^2}(y-\bar{y}),\ \ y-\bar{y}=\frac{\bar{k}}{s_1^2}(x-\bar{x}),$$

где $\bar{x},\bar{y}$ – средние выборочные, $S_1^2$ и $S_2^2$ – выборочные дисперсии, $\bar{k}$ – выборочная ковариация; они определяются по формулам

$$\overline{x_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ ,\ \overline{y_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\ ,\ \ \overline{k_n}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\ ,$$

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\ ,\ S_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2\ .$$

Выборочный коэффициент корреляции $\bar{r}$ определяется по формуле $\bar{r} = \dfrac{\bar{k}}{\sqrt{S_1^2 S_2^2}}$.

Введем функции:

$$\mathbf{PR\_V}(d,g) := \mathbf{VECTOR}((\mathbf{ELEMENT}(d,k) - \mathbf{AVERAGE}(d)) \cdot (\mathbf{ELEMENT}(g,k) - \mathbf{AVERAGE}(g)), k, 1, \mathbf{DIMENSION}(d))$$

$$\mathbf{LIN\_REG1}(d,g,x,y) := y = \mathbf{AVERAGE}(g) + \frac{\mathbf{AVAREGE}(\mathrm{PR\_V}(d,g))}{\mathbf{VAR}(d)}x - \frac{\mathbf{AVERAGE}(\mathrm{PR\_V}(d,g))}{\mathbf{VAR}(d)}\mathbf{AVERAGE}(d)$$

Функция **PR_V** – вспомогательная. Функция **LIN_REG1** находит уравнение прямой регрессии $Y$ на $X$. Чтобы найти уравнение прямой регрессии $X$ на $Y$, можно воспользоваться этой же функцией, поменяв ролями $d$ и $g$, $x$ и $y$, а затем решить полученное уравнение относительно переменной $y$ (для построения графика). Для ускорения решения этой задачи введем функцию **LIN_REG2**.

$$\mathbf{LIN\_REG}\,2(d,g,x,y) := \mathbf{SOLVE}(\mathbf{LIN\_REG}1(g,d,y,x), y)$$

$$\mathbf{KOF\_REG}(d,g) := \frac{\mathrm{AVERAGE}(\mathrm{PR\_V}(d,g))}{\sqrt{\mathrm{VAR}(d)\,\mathrm{VAR}(g)}}$$

Эта функция определяет коэффициент регрессии.
Для построения рисунка введем функцию, объединяющую опытные данные в таблицу (матрицу).

$$\mathbf{STR\_VSTOL}(d,g,k) := \mathbf{VECTOR}([\mathrm{ELEMENT}(d,k), \mathbf{ELEMENT}(g,k)], k, 1, \mathbf{DIMENSION}(d))$$

(Сокращение от «строки – в столбец».)

**Задача.** Произведены независимые опыты, в результате которых случайные величины $X$ и $Y$ приняли значения, приведенные в таблице. Найдите выборочные уравнения прямых регрессии и выборочный коэффициент корреляции. Постройте точки и прямые регрессии, сделайте вывод о тесноте корреляционной зависимости между случайными величинами $X$ и $Y$.

а)

| $x_i$ | 1 | 6 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 11 | 8 | 5 | 4 | 6 | 3 | 2 | 6 | 7 | 8 |

б)

| $x_i$ | –9 | –7 | –5 | –3 | –1 | 1 | 3 | 4 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | –2 | –5 | 7 | 7 | 0 | 1 | 4 | 4 | 5 | 7 |

Решение.

1. Введем данные.

$a := [1, 6, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 9]$ ↵

$b := [11, 18, 15, 14, 16, 13, 12, 16, 17, 18]$ ↵

2. **LIN_REG1**($a$, $b$) ↵ S. Результат: $y = \frac{9x}{11} + \frac{120}{11}$.

3. **LIN_REG2**($a$, $b$) ↵ S. Результат: $\left[y = \frac{3(x+5)}{2}\right]$.

4. Построим рисунок. Объединим данные в таблицу.

**STR_VSTOL**($a$, $b$) ↵ S или **STR_VSTOL**($a$, $b$)\` ↵ S.

В первом случае получим вертикальную таблицу, во втором – горизонтальную. Выделив курсором таблицу, нажав два раза на клавишу **P**, построим точки. Постройте прямые регрессии (для построения второй кривой выделите уравнение курсором при помощи клавиш-стрелок).

На рис. 109, 110, 111 видим, что во втором примере корреляционная связь более тесная, чем в первом: прямые регрессии почти совпадают. Коэффициент регрессии во втором случае близок к единице, это тоже говорит о тесной корреляционной зависимости между случайными величинами.

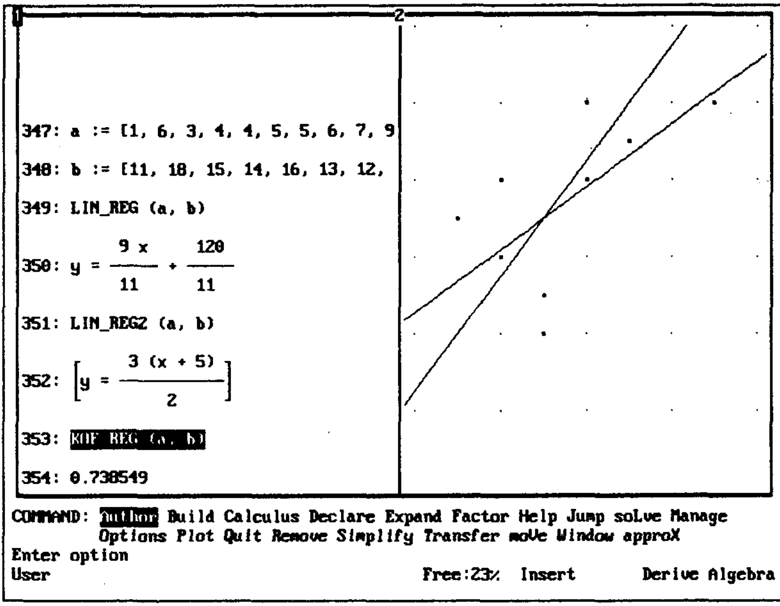



Рис. 109

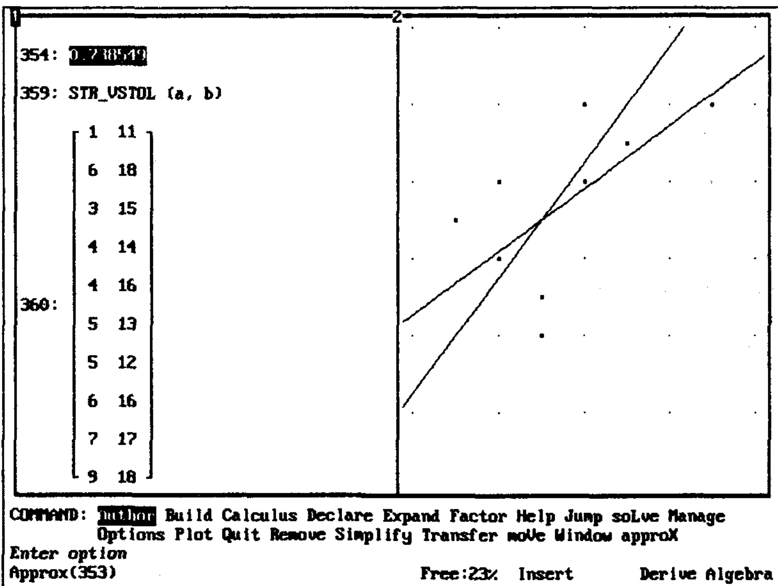



Рис. 110

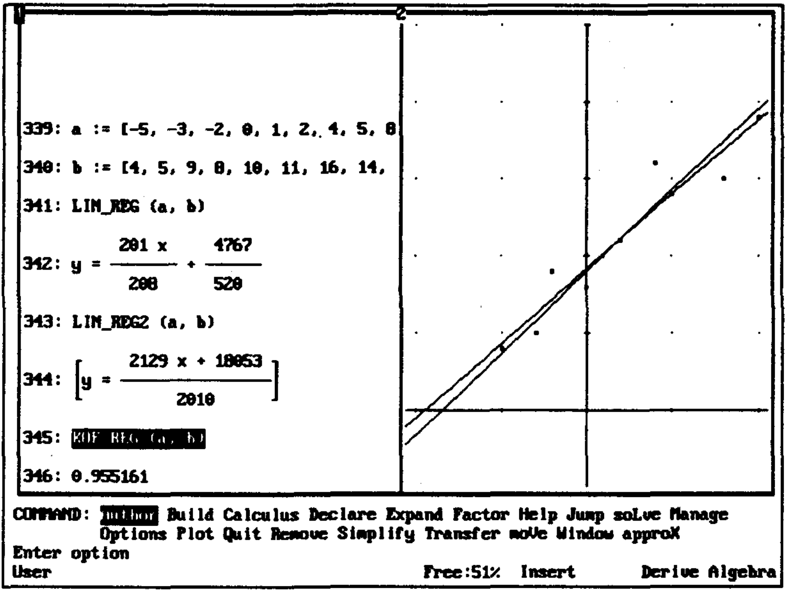



**Рис. 111**

## Числовые характеристики выборочного распределения

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – выборка объема $n$ из генеральной совокупности, $m_i$ – частота, с какой случайная величина $X$ принимает значение $x_i$. Если это частота, с которой $X$ попадает в интервал, то в качестве $x_i$ принимают середину этого интервала.

Выборочное математическое ожидание случайной величины $X$ определяется по формуле:

$$\tilde{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i .$$

Выборочное математическое ожидание можно определить так же, как выборочный момент первого порядка.

Выборочная дисперсия определяется по формуле:

$$\tilde{\tilde{D}} = \tilde{m}(X^2) - \tilde{m}^2(X)$$

Введем функции, определяющие выборочные момент $s$-го порядка, математическое ожидание, дисперсию в предположении, что данные сгруппированы. Прежде всего нам придется ввести функцию, определяющую объем выборки, назовем эту функцию **OB_VIB**.

$$\mathbf{OB\_VIB}(u) := \sum_{k=1}^{\mathrm{DIMENSION}(u)} \mathrm{ELEMENT}(u,k)$$

$$\mathbf{MOM\_S}(u,t,s) := \frac{\sum_{k=1}^{\mathrm{DIMENSION}(u)} \mathrm{ELEMENT}(u,k)\,\mathrm{ELEMENT}(t,k)^s}{\mathrm{OB\_VIB}(u)}$$

$$\mathbf{MAT\_OS}(u,t) := \mathrm{MOM\_S}(u,t,1)$$

$$\mathbf{DIS\_V}(u,t) := \frac{(\mathrm{MOM\_S}(u,t,2) - \mathrm{MAT\_OS}(u,t)^2)\,\mathrm{OB\_VIB}(u)}{\mathrm{OB\_VIB}(u) - 1}$$

$$\mathbf{SIG\_V}(u,t) := \sqrt{\mathrm{DIS\_V}(u,t)}$$

Здесь $t$ – вектор значений случайной величины, $u$ – вектор соответствующих частот. **OB_VIB** – объем выборки, **MOM_S** – выборочный момент $s$-го порядка, **MAT_OS** – выборочное математическое ожидание, **DIS_V** – выборочная дисперсия, **SIG_V** – выборочное среднее квадратическое отклонение.

***Замечание.*** Все функции введены в предположении, что данные вводятся в виде двух векторов, так их вводить несколько быстрее, чем в виде матрицы. При желании несложно ввести функции, рассчитанные на ввод данных в виде матрицы.

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Найти среднее выборочное, выборочные дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной выборки.

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_i$ | 5 | 8 | 20 | 56 | 40 | 12 | 3 |

Р е ш е н и е.
1. Введем v: = [5, 8, 20, 56, 40, 12, 3] (вектор частот)
w: = [1, 2, 3, 4, 7, 8, 9] (вектор значений $x_i$)

2. Найдем математическое ожидание:
**MAT_OS**(v,w) ↵ X ↵. Результат: 4.9167.

3. Найдем выборочную дисперсию:
**DIS_V**(v,w) ↵ X ↵. Результат: 4.2168.

4. Найдем выборочное среднее квадратическое отклонение:
**SIG_V**(v,w) ↵ X ↵. Результат: 2.0535.

Если заданы границы интервалов, в которые попадают значения случайной величины, то в качестве $x_i$ принимают середины интервалов.

Введем функцию для определения середины интервалов:

$$\mathbf{VS\_SR}(t) := \mathrm{VECTOR}\left(\frac{\mathrm{EL}(t,k-1)+\mathrm{EL}(t,k)}{2}, k, 2, \mathrm{DIM}(t)\right)$$

*Замечание*. Функции **EL** и **DIM** вводить надо полностью – **ELEMENT** и **DIMENSION**.

**VS_SR** – вспомогательная функция (от слов «вспомогательное, середина»).

Пусть через v обозначен вектор частот, w – вектор границ интервалов. Размерность вектора w на единицу больше размерности вектора v. Выборочные характеристики можно находить, используя введенные выше функции, но при запросе вместо вектора значений w надо ввести **VS_SR**(w). Чтобы упростить нахождение выборочных числовых характеристик в этом случае введем новые функции:

$$\mathbf{MAT\_OS\_VN}(u,t) := \mathbf{MAT\_OS}(u, \mathbf{VS\_SR}(t))$$

$$\mathbf{SIG\_VN}(u,t) := \mathbf{SIG\_V}(u, \mathbf{VS\_SR}(t))$$

Введите функцию **DIS_VN**.

**Задача 2.** Найти среднее выборочное и выборочное среднее квадратическое отклонение данной выборки.

| Границы интервала | 1–3 | 3–5 | 5–7 | 7–9 | 9–11 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота | 2 | 8 | 14 | 26 | 4 |

Решение.

1. Введем v: = [2, 8, 14, 26, 4] (вектор частот)
w: = [1, 3, 5, 7, 9, 11] (вектор значений $x_i$)

2. Найдем математическое ожидание:
**MAT_OSN**(v,w) ↲ X ↲. Результат: 6.8148.

3. Найдем выборочное среднее квадратическое отклонение.
**SIG_VN**(v,w) ↲ X ↲. Результат: 1.9238.

## Критерий Пирсона и его применение

**Проверка гипотезы о виде распределения генеральной совокупности.** Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка наблюдений случайной величины $X$. Проверяется гипотеза $H_0$, утверждающая, что $X$ имеет функцию распределения $F_X(x)$.

Проверка гипотезы $H_0$ при помощи критерия $\chi^2$ (критерия Пирсона) осуществляется по следующей схеме. По выборке наблюдений находят оценки неизвестных параметров предполагаемого закона распределения случайной величины $X$. Далее область возможных значений случайной величины $X$ разбивается на $r$ множеств $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$, например, $r$ интервалов в случае, когда $X$ — непрерывная случайная величина, или $r$ групп, состоящих из отдельных значений, для дискретной случайной величины $X$.

Пусть $n_k$ — число элементов выборки, принадлежащих множеству $\Delta_k, k = 1,2,\ldots, r$. Очевидно, что $\sum_{k=1}^{r} n_k = n$. Используя предполагаемый закон распределения случайной величины $X$, находят вероятности $p_k$ того, что значение $X$ принадлежит множеству $\Delta k$, т.е. $p_k = P[X_k \in \Delta_k]$, $k = 1,2,\ldots, r$. Очевидно, что $\sum_{k=1}^{r} p_k = 1$. Полученные результаты можно представить в виде следующей таблицы:

| | Число наблюдений | | | | Всего |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | ... | $\Delta_r$ | |
| Наблюдаемое | $n_1$ | $n_2$ | ... | $n_r$ | $n$ |
| Ожидаемое | $np_1$ | $np_2$ | ... | $np_r$ | $n$ |

Выборочное значение статистики критерия $\chi^2$ вычисляется по формуле:

$$\chi_B^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$$

Гипотеза $H_0$ согласуется с результатами наблюдений на уровне значимости $\alpha$, если

$$\chi_B^2 < \chi_{1-\alpha}^2 \ \ (r - l - 1),$$

где $\chi_{1-\alpha}^2 \ (r - l - 1)$ — квантиль порядка $1 - \alpha$ распределения $\chi^2$с $r$–$l$–1 степенями свободы, а $l$ – число неизвестных параметров распределения, оцениваемых по выборке; если же $\chi_B^2 \geq \chi_{1-\alpha}^2(r - l - 1)$, то гипотеза $H_0$ отклоняется.

> ***Замечание***. Критерий $\chi^2$ использует тот факт, что случайная величина $\dfrac{n_k - np_k}{\sqrt{np_k}}$ $k = 1, 2 ,.., r$, имеет распределение, близкое к нормальному $N(0,1)$. Чтобы это утверждение было достаточно точным, необходимо, чтобы для всех интервалов выполнялось условие $np_k \geq 5$. Если в некоторых интервалах это условие не выполняется, то их следует объединить с соседними.

Введем функцию **KR_PIR** (критерий Пирсона).

$$\mathbf{KR\_PIR}(u,t) := \sum_{k=1}^{\mathrm{DIMENSION}(u)} \frac{(\mathrm{ELEMENT}(u,k) - \mathrm{ELEMENT}(t,k))^2}{\mathrm{ELEMENT}(t,k)}$$

Применения этой функции рассмотрены в следующих пунктах.

**Проверка гипотезы о распределении генеральной совокупности по биномиальному закону.** Введем функцию **TERCH_BIN**, определяющую теоретические частоты.

$$\mathbf{BINOM\_TAB}(p,u) := \mathbf{VECTOR}\,(\mathbf{COMB}\ (n,k)p^k(1-p)^{n-k},k,o,n)$$

$$\mathbf{TERCH\_BIN}\ (u,p) := \mathbf{OB\_VIB}\ (u) \cdot \mathbf{BINOM\_TAB}\ (p,\mathbf{DIMENSION}\ (u)-1)$$

Для облегчения построения рисунка введем функции **VEC_BIN**, **RISTAB_BIN** и **RISTAB_BIN2_T**.

$$\mathbf{VEC\_BIN}(u) := \mathbf{VECTOR}\,(k,k,0,\mathbf{DIMENSION}\,(u)-1)$$

$$\mathbf{RISTAB\_BIN}\,(d) := \mathbf{STR\_VSTOL}\,(\mathbf{VEC\_BIN}(d),d)$$

$$\mathbf{RISTAB\_BIN\_T}(u,p) := \mathbf{STR\_VSTOL}(\mathbf{VEC\_BIN}(u),\mathbf{TERCH\_BIN}(u,p))$$

Назначение функции **VEC_BIN** очевидно: она создает вектор, состоящий из чисел от 0 до $n$. Функция **RISTAB_BIN** соединяет данные задачи в матрицу, функция **RISTAB_BIN_T** определяет теоретические точки.

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Опыт, состоящий в одновременном подбрасывании четырех монет, повторили 100 раз. Эмпирическое распределение дискретной случайной величины $X$ – числа появившихся «гербов» – оказалось следующим ( в первой строке указано число $x_i$ выпавших «гербов» в одном бросании монет; во второй строке – частота $m_i$, т.е. число бросаний, при которых выпало $x_i$ «гербов»):

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $m_i$ | 8 | 20 | 42 | 22 | 8 |

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина $X$ распределена по биномиальному закону.

***Указание.*** Принять вероятность выпадения «герба» $p = 0,5$.

Р е ш е н и е.

1. Введем вектор v: = [8, 20, 42, 22, 8].

2. Вычислим теоретические частоты:

**CHT:=TERCH_BIN**(v,0.5) ↲X ↲.

Результат: cht = [6.25, 25, 37.5, 25, 6.25].

3. Найдем $\chi^2_{\text{в}}$.

**KR_PIR**(v,cht) ↲X ↲. Результат: 2.88 $\Rightarrow \chi^2_{\text{в}} = 2.88$.

4. Так как вероятность появления события в отдельном опыте известна, то число степеней свободы равно 5 – 1 = 4.

$\chi^2_{1-0.05}(4) = 9.49$.

5. $\chi^2_{\text{в}} < 9.49$. Следовательно, гипотеза не отвергается.

*Замечание.* Не обязательно выводить на экран значения cht, то есть в пункте 2 решения не обязательно выполнять ↲X.

Сделаем рисунок.

1. Построим данные точки:

**RISTAB_BIN**(v) ↲S ↲.

2. Найдем теоретические точки:

**RISTAB_BIN_T**(v,0.5) ↲S ↲.

Постройте найденные точки другим цветом, отличным от цвета предыдущих точек.

По близости данных и теоретических данных можно судить о правильности наших вычислений.

Можно было сравнить относительные частоты.

Введем функции

$$\mathbf{CH\_BIN}(u) := \text{VECTOR}\left(\frac{\text{ELEMENT}(u,k)}{\text{OB\_VIB}(u)}, k, 1, \text{DIMENSION}(u)\right)$$

$$\mathbf{RTAB\_BIN\_CH}(u) := \mathbf{STR\_VSTOL(VEC\_BIN}(u), \mathbf{CH\_BIN}(u))$$

$$\mathbf{RTAB\_BIN\_CHT}(u,p) :=$$
$$\text{STR\_VSTOL}\left(\text{VEC\_BIN}(u), \frac{\text{TERCH\_BIN}(u,p)}{\text{OB\_VIB}(u)}\right)$$

**CH_BIN** определяет относительные частоты по результатам опыта, **RTAB_BIN_CH** соединяет в матрицу значения случайной величины и соответствующие им относительные частоты, **RTAB_BIN_CHT** находит матрицу возможных значений случайной величины и соответствующих им относительных частот.

Постройте рисунок к задаче, используя эти функции (рис. 112).

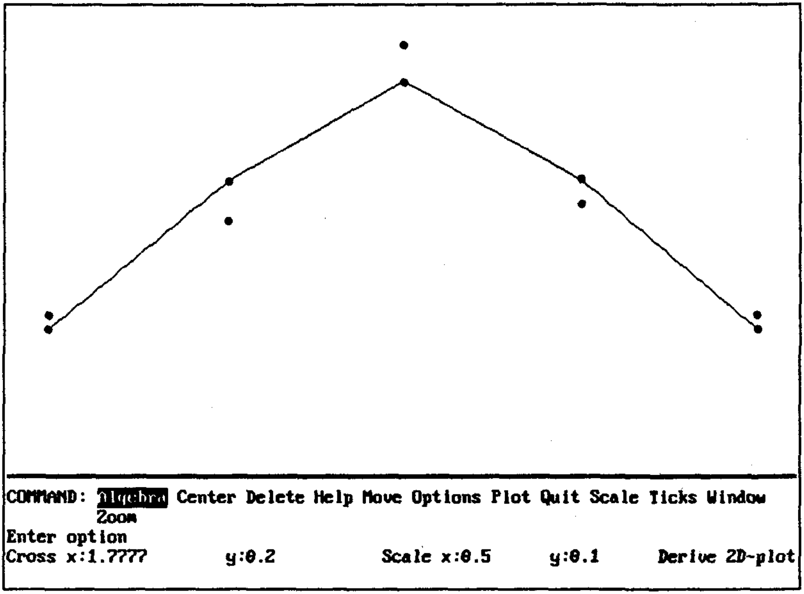



**Рис. 112**

Для большей наглядности на рис. 112 теоретические частоты соединены отрезками.

**Проверка гипотезы о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона.** Введем функцию для определения теоретических частот для случайной величины, распределенной по закону Пуассона.

$$\mathbf{TERCH\_PUAS}(u,t) :=$$
$$\mathbf{OB\_VIB}(u)\mathbf{PUAS\_TAB}(\mathbf{MAT\_OS}(u,t), \mathbf{DIMENSION}(u) - 1)$$

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** В таблице приведены данные об отказах аппаратуры за 10000 часов работы.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ≥6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_k$ | 427 | 235 | 72 | 21 | 1 | 1 | 0 |

Проверить гипотезу о том, что число отказов имеет распределение Пуассона при $\alpha = 0.01$.

Решение.

1. Введем вектор v: = [427, 235, 72, 21, 1, 1, 0].
2. Вычислим теоретические частоты.

**TERCH_PUAS**($v$,**VEC_BIN**($v$)) ↵ X ↵.

3. Объединим числа так, чтобы частоты были не меньше 5, для этого надо объединить последние четыре числа.
Результат: cht: = [417.21, 248.56, 74.04, 17.1812].
4. Соответственно изменим вектор v, результат обозначим через ch.

ch: = [427, 235, 72, 23].

5. Найдем $\chi^2_{\text{в}}$.

**KR_PIR**(ch,cht) ↵ X ↵. Результат: 2.995 ⇒ $\chi^2_{\text{в}} = 2.995$.

5. Число степеней свободы 4 – 2 = 2. $\chi^2_{1-0.01}(2) = 9.21$.

6. $\chi^2_{\text{в}} < 9.21$. Следовательно, гипотеза принимается.
Ответ: гипотеза принимается.

**Задача 2.** В результате эксперимента, состоящего из $n = 1000$ испытаний, в каждом из которых регистрировалось число $x_i$ появлений некоторого события, получено следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано количество $x_i$ появлений события; во второй строке – частота $m_i$, т.е. число испытаний, в которых наблюдалось $x_i$ появлений события):

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_i$ | 505 | 336 | 125 | 24 | 8 | 2 |

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что случайная величина $X$ – число появлений события – распределена по закону Пуассона.

**Задача 3.** (*Задача Борткевича.*) На основании 200 донесений, полученных в течение двадцати лет о количестве кавалеристов прусской армии, которые погибли в результате гибели под ними коня, было получено следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано количество $x_i$ погибших кавалеристов, указанных в одном донесении, во второй строке – частота $n_i$, т.е. число донесений, в которых сообщено о гибели $x_i$ кавалеристов):

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $m_i$ | 109 | 65 | 22 | 3 | 1 |

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о распределении случайной величины $X$ (числа погибших кавалеристов) по закону Пуассона.

**Задача 4.** В результате проверки 500 контейнеров со стеклянными изделиями установлено, что число поврежденных изделий $X$ имеет следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано количество $x_i$ поврежденных изделий в одном контейнере; во второй строке – частота $m_i$, число контейнеров, содержащих $x_i$ поврежденных изделий):

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_i$ | 199 | 169 | 87 | 31 | 9 | 3 | 1 | 1 |

Требуется при уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о том, что случайная величина $X$ – число поврежденных изделий – распределена по закону Пуассона.

**Задача 5.** Изучается некоторая случайная величина $X$. В результате произведенных опытов получено следующее эмпирическое распределение:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_i$ | 25 | 81 | 124 | 146 | 175 | 106 | 80 | 35 | 16 | 6 | 6 |

На уровне значимости $\alpha = 0,15$ проверить гипотезу о том, что случайная величина $X$ распределена по закону Пуассона.

**Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности.** Введем функции:

$$\mathbf{RAZ\_D}(q) := \mathbf{VECTOR}(\mathbf{ELEMENT}(q,k),k,2,\mathbf{DIMENSION}(q)-1)$$

$$\mathbf{PL\_VIB\_N}(u,t) := \mathbf{PL\_NOR\_T}(\mathbf{MAT\_OS\_VN}(u,t),\mathbf{SIG\_VN}(u,t))$$

**PL_VIB_N** – «плотность выборочная нормальная».

$$\mathbf{TERCH\_NOR\,2}(u,t,q) := \mathbf{OB\_VIB}(u)\mathbf{TABVER\_NOR}(q,\mathbf{MAT\_OS\_VN}(u,t),\mathbf{SIG\_VN}(u,t))$$

$$\mathbf{VIBV}(u,t,k) := \mathrm{VECTOR}\left(\left[\mathrm{EL}(\mathrm{VS\_SR}(t),m),\mathrm{EL}\left(\frac{u}{k\cdot \mathrm{OB\_VIB}(u)},m\right)\right],m,1,\mathrm{DIM}(u)\right)$$

*Замечание*. Вводить надо полные имена функций: **ELEMENT**, **DIMENSION**. **TERCH2_NOR** – теоретические частоты, **VIBV** – «выборочные вероятности» $\rho_i$.

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Проверить гипотезу о нормальном распределении данной выборки с $\alpha = 0,1$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20,3 | 15,4 | 17,2 | 19,2 | 23,3 | 18,1 | 21,9 |
| 15,3 | 16,8 | 13,2 | 20,4 | 16,5 | 19,7 | 20,5 |
| 14,3 | 20,1 | 16,8 | 14,7 | 20,8 | 19,5 | 15,3 |
| 19,3 | 17,8 | 16,2 | 15,7 | 22,8 | 21,9 | 12,5 |
| 10,1 | 21,1 | 18,3 | 14,7 | 14,5 | 18,1 | 18,4 |
| 13,9 | 19,1 | 18,5 | 20,2 | 23,8 | 16,7 | 20,4 |
| 19,5 | 17,2 | 19,6 | 17,8 | 21,3 | 17,5 | 19,4 |
| 17,8 | 13,5 | 17,8 | 11,8 | 18,6 | 19,1 | |

Решение.

1. Сгруппируем выборку:

| Границы интервала | $-\infty$ –12 | 12–14 | 14–16 | 16–18 | 18–20 | 20–22 | 22–+$\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Частота | 2 | 4 | 8 | 12 | 16 | 10 | 3 |

2. Введем векторы

ww: = [– inf, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, inf]
v: = [2, 4, 8, 12, 16, 10, 3]

3. Введем w: = **RAZ_D**(ww) .

4. **TERCH_NOR2**(v,w,ww) ↲ X ↲.

Результат: [0.2022, 1.0599, 3.9474, 9.3631, 14.1549, 13.6431, 8.3836, 3.2831, 0.9626]

5. Суммируем крайние числа, чтобы каждое из чисел вектора было не меньше 5. Для этого надо объединить первые три и последние три числа полученного вектора. Результат обозначим через cht.

cht: = [5.2094, 9.3631, 14.1549, 13.6431, 12.6293].

6. Соответственно объединяем числа в векторе v, то есть первые два и последние два числа. Результат обозначим через ch.

ch: = [6, 8, 12, 16, 13].

7. Воспользуемся критерием Пирсона.

**KR_PIR**(ch,cht) ↲ X ↲. Результат: 1.06452.

Это значение $\chi^2_в$.

8. В векторе v 5 разрядов, поэтому по таблицам ищем:

$$\chi^2_{1-\alpha}(5-3) = \chi^2_{0.9}(2) = 4.6.$$

9. $\chi^2_в < \chi^2_{кр}$, следовательно, гипотеза принимается.

Ответ: гипотеза принимается.

```
338: v := [2, 4, 8, 12, 16, 10, 3]

339: ww := [-ь, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, ь]

340: w := RAZ_D (ww)

341: TERCH_NOR2 (v, w, ww)

342: [0.202169, 1.05990, 3.94735, 9.36312, 14.1549, 13.6431, 8.38362, 3.28307, 0

343: cht := [5.20944, 9.36312, 14.1549, 13.6431, 12.6293]

344: ch := [6, 8, 12, 16, 13]

345: KR_PIR (ch, cht)

346: 1.06452

347: VIBV (v, w, 2)

348: [[11, 1/55], [13, 2/55], [15, 4/55], [17, 6/55], [19, 8/55], [21, 1/11], [2

349: PL_VIB (v, w)
─────────────────────────────────────────────────────────────────────────
COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
         Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Enter option
User                A:\SECR2\OSNFORM7.M  Free:50%  Insert      Derive Algebra
```

**Рис. 113**

На рис. 113 приведен протокол решения задачи.

Построим рисунок.

1. Найдем выборочное математическое ожидание, это надо для того, чтобы правильно центрировать рисунок.

**MAT_OS_VN**(v,w) ↲ S ↲. Результат: 17.8363

2. Найдем выборочные вероятности.

**VIBV**(v,w,2) ↲ S ↲.

3. Найдем теоретическую плотность нормальной случайной величины:

**PL_VIB_N**(v,w) ↵ S ↵.

Результат: $y = 0.1365e^{-0.059x^2+2.087x-18.61}$

4. Строим рисунок:

центрируем **P Move** x:17.8 y:0 **Center**.

Строим найденную кривую, подбираем масштаб (разный по осям) строим точки, определенные функцией **VIBV**.

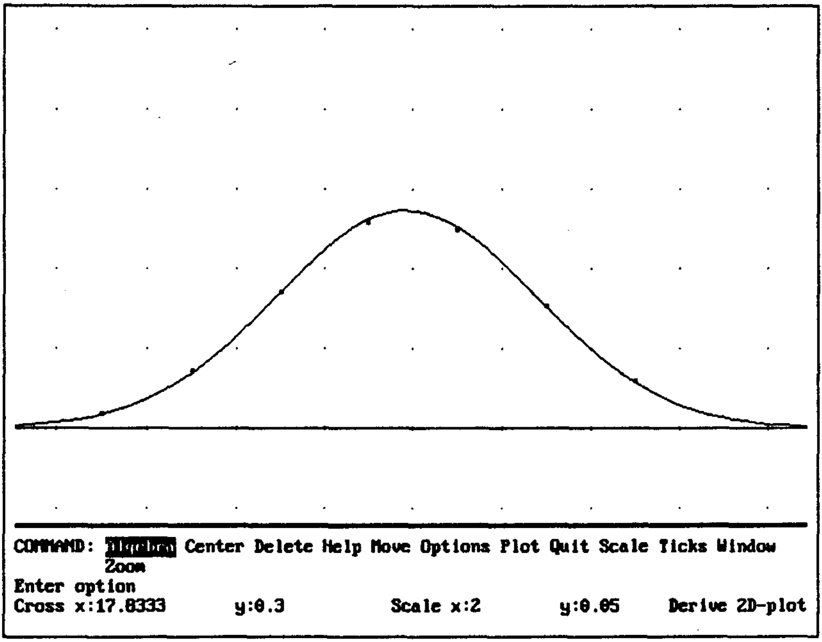



**Рис. 114**

По рисунку (рис. 114) видим, что совпадение хорошее.

**Задача 2.** Проверить гипотезу о том, что данные выборки при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ получены из нормально распределенной генеральной совокупности.

Рост 1004 девушек в возрасте 16 лет (см):

| Границы интервала | 134–137 | 137–140 | 140–143 | 143–146 | 146–149 | 149–152 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Частота | 1 | 4 | 16 | 53 | 121 | 197 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 152–155 | 155–158 | 158–161 | 161–164 | 164–167 | 167–170 | 170–173 |
| 229 | 186 | 121 | 53 | 17 | 5 | 1 |

**Задача 3.** Проверить при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности $X$ с эмпирическим распределением, заданным таблицей:

| Границы интервала | 155–158 | 158–161 | 161–164 | 164–167 | 167–170 | 170–173 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Частота | 1 | 4 | 6 | 24 | 63 | 164 |

| Границы интервала | 173–176 | 176–179 | 179–182 | 182–185 | 188–191 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота | 180 | 168 | 116 | 9 | 1 |

Ответ: гипотеза не принимается.

Постройте рисунок (рис. 115).

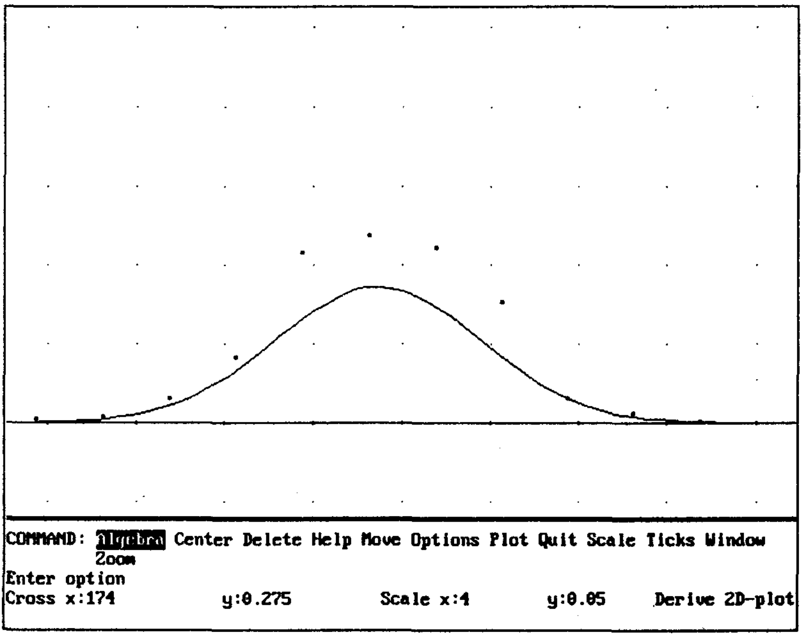



**Рис. 115**

На рисунке хорошо видно, что гипотеза о нормальном распределении случайной величины не подтверждается: построенные точки лежат далеко от теоретической кривой.

**Задача 4.** Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности $X$ с эмпирическим распределением выборки объема $n = 200$:

| $x_i$ | 0,3 | 0,5 | 0,7 | 0,9 | 1,1 | 1,3 | 1,5 | 1,7 | 1,9 | 2,1 | 2,3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 6 | 9 | 26 | 25 | 30 | 26 | 21 | 24 | 20 | 8 | 5 |

**Проверка гипотезы о независимости двух случайных величин.** Предположим, что проведено $n$ экспериментов, результаты которых являются значениями дискретных случайных величин $X$ и $Y$, которые принимают соответственно значения $x_1,\ x_2,\dots,x_k$ и $y_1, y_2, \dots, y_l$. Обозначим через $n_{ij}$ – число экспериментов, в которых $X = x_i$, $Y = y_j$, $i = 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, l$. Если $X$ и $Y$ – непрерывные случайные величины, то область значений каждой из них разбивается на конечное число интервалов. В этом случае $n_{ij}$ – число экспериментов, в которых случайная величина $X$ попала в $i$-й интервал, а случайная величина $Y$ – в $j$-й интервал. Результаты экспериментов можно представить в виде таблицы сопряженности признаков размера $k \times l$.

Проверяется гипотеза $H_0$, утверждающая, что случайные величины $X$ и $Y$ независимы. Если гипотеза $H_0$ верна, то по определению

$$P[X = x_i; Y = y_i] = P[X = x_i]P[Y = y_i] = p_i q_j$$

Пусть $\widetilde{p}_i = \dfrac{n_{i.}}{n}$ и $\widetilde{q}_j = \dfrac{n_{.j}}{n}$ – оценки вероятностей $p_i$ и $q_j$.

Если гипотеза $H_0$ верна, то ожидаемое число экспериментов $\widetilde{n}_{ij}$, в которых случайная величина $X$ попала в $i$-й интервал, а случайная величина $Y$ – в $j$-й интервал, равно:

$$\widetilde{n}_{ij} = \widetilde{p}_i \widetilde{q}_j = \frac{n_{i.} n_{.j}}{n}.$$

Для проверки гипотезы $H_0$ по критерию $\chi^2$ используют следующую статистику:

$$\chi^2_{‰} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{(n_{ij} - \widetilde{n}_{ij})^2}{\widetilde{n}_{ij}} .$$

При условии, что гипотеза $H_0$ верна, а все ожидаемые частоты $\widetilde{n}_{ij} \geq 4$, $i = 1, 2, ..., k; j = 1, 2, ..., l$, статистика $\chi^2_{в}$ имеет распределение $\chi^2$ с $(k - 1)(l - 1)$ степенями свободы.

Гипотеза $H_0$ о независимости случайных величин $X$ и $Y$ принимается на уровне значимости $\alpha$, если выборочное значение статистики (4) меньше квантили $\chi^2_{1-\alpha}((k-1)(l-1))$, то есть если

$$\chi^2_B < \chi^2_{1-\alpha}((k-1)(l-1)) .$$

Если $\chi^2_B \geq \chi^2_{1-\alpha}((k-1)(l-1))$, то гипотеза $H_0$ отклоняется.

***Замечание***. Если ожидаемые частоты $\widetilde{n}_{ij}$ для некоторых клеток таблицы 6.4 не удовлетворяют условию $\widetilde{n}_{ij} \geq 4$, то соответствующие строки и столбцы должны быть объединены с соседними строками и столбцами.

| | $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_1$ | $\sum_{j=1}^{l} n_{ij} = n_{i\cdot}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $n_{11}$ | $n_{12}$ | ... | $n_{1l}$ | $n_{1\cdot}$ |
| $x_2$ | $n_{21}$ | $n_{22}$ | ... | $n_{2l}$ | $n_{2\cdot}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $x_k$ | $n_{k1}$ | $n_{k2}$ | ... | $n_{kl}$ | $n_{k\cdot}$ |
| $\sum_{j=1}^{l} n_{ij} = n_{\cdot j}$ | $n_{\cdot 1}$ | $n_{\cdot 2}$ | ... | $n_{\cdot j}$ | $n_{\cdot\cdot} = n$ |

Если $(k-1)(l-1) \geq 8$ и $n \geq 40$, то минимальное допустимое значение ожидаемых частот может быть равно единице.

Случайные величины $X$ и $Y$ можно рассматривать как два признака, по которым классифицируется выборка объема $n$; независимость $X$ и $Y$ соответствует независимости этих признаков.

Во многих случаях требуется проверить гипотезу об однородности нескольких выборок или, иными словами, гипотезу о том, что эти выборки получены из одной генеральной совокупности. Если проверяется однородность $k$ различных выборок с объемами $n_1$, $n_2, \ldots, n_k$ и эти выборки могут быть записаны в виде таблицы сопряженности признаков размера $k \times l$, то для проверки используется тот же критерий, что и для проверки независимости двух признаков.

Введем функции:

$$\mathbf{SUM\_GOR}(u,i) := \sum_{k=1}^{\mathrm{DIMENSION(ELEMENT}(u,i))} \mathrm{ELEMENT(ELEMENT}(u,i),k)$$

$$\mathbf{SUM\_VER}(u,m) := \sum_{i=1}^{\mathrm{DIMENSION}(u)} \mathrm{ELEMENT(ELEMENT}(u,i),m)$$

$$\mathbf{SUM\_VSE}(u) := \sum_{i=1}^{\mathrm{DIMENSION}(u)} \mathrm{SUM\_GOR}(u,i)$$

$$\mathbf{VS\_B}(u) := \sum_{i=1}^{\mathrm{DIM}(u)} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{DIM(ELEMENT}(u,1))} \frac{\mathrm{ELEMENT(ELEMENT}(u,i),k)^2}{\mathrm{SUM\_VER}(u,k)}}{\mathrm{SUM\_GOR}(u,i)}$$

Здесь **DIM(*u*):=DIMENSION(*u*)**. Можно не вводить функцию DIM, она введена для сокращения записи в книге.

$$\mathbf{HI\_NEZ}(u) := (\mathbf{VS\_B}(u) - 1) \cdot \mathbf{SUM\_VSE}(u)$$

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Отношение зрителей к одному кинофильму выразилось следующими данными:

| | понравился | не понравился | безразличны |
|---|---|---|---|
| Дети | 50 | 7 | 10 |
| Женщины | 30 | 20 | 20 |
| Мужчины | 10 | 20 | 50 |

Можно ли считать отношение к фильму не зависящим от возраста? Принять $\alpha = 0.10$.

Решение.

1. Введем вектор v: = [[50, 7, 10],[30, 20, 20],[10, 20, 50]].

2. **HI_NEZ**(v) ↲ X ↲. Результат: 64.1395 ⇒ $\chi^2_{\text{в}} = 64.1395$.

3. Число степеней свободы равно $(k-1)(l-1)=(3-1)(3-1)=4$.

Найдем $\chi^2_{1-0.05}(4) = 9.49$.

4. $\chi^2_{‰} > 9.49$. Следовательно, гипотеза не принимается.

**Задача 2.** Проверить гипотезу о независимости предрасположенности к некоторой болезни в зависимости от места проживания А, В или С. Результаты обследования приведены в таблице. Принять $\alpha = 0.05$.

| | больны | здоровы | пограничное состояние |
|---|---|---|---|
| A | 500 | 15 | 70 |
| B | 70 | 300 | 20 |
| C | 100 | 300 | 50 |

Ответ: гипотеза не принимается.

**Задача 3.** Комплектующие изделия одного наименования поступают с трех предприятий А, В, С. Результаты проверки следующие:

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Годные | 29 | 38 | 53 |
| Негодные | 1 | 2 | 7 |

Можно ли считать, что качество изделий не зависит от поставщика? Принять $\alpha = 0.10$.

Ответ: Да. Обратите внимание на то, что здесь число степеней свободы равно $(3-1)(2-1) = 2$. $\chi^2_{1-0.1}(2) = 4.61$. Видим, что $\chi^2_{\text{в}} < \chi^2_{\text{кр}}$, следовательно, гипотеза принимается.

**Проверка гипотезы о равенстве параметров двух биномиальных распределений.** Предположим, что независимо проведены две серии, содержащие $n_1$ и $n_2$ испытаний соответственно. В первой серии событие $A$ произошло $n_{11}$ раз, а во второй $n_{21}$ раз. Требуется проверить гипотезу $H_0$ о том, что вероятность появления события $A$ в обеих сериях одна и та же, т.е. $H_0$: $p_1 = p_2$. Результаты обеих серий можно представить в виде таблицы сопряженности признаков размера $2 \times 2$:

| Серия | Событие | | Сумма |
|---|---|---|---|
| | $A$ | $\bar{A}$ | |
| 1 | $n_{11}$ | $n_{12}$ | $n_{1.}$ |
| 2 | $n_{21}$ | $n_{22}$ | $n_{2.}$ |
| Сумма | $n_{.1}$ | $n_{.2}$ | $n_{..} = n$ |

Гипотеза $H_0$: $p_1 = p_2$ эквивалентна гипотезе о том, что обе выборки получены из одной генеральной совокупности, т.е. однородны, и проверяется по критерию $\chi^2$. В этом случае для вычисления выборочного значения статистики критерия удобно использовать формулу

$$\chi^2_{\text{‰}} = \frac{n(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})^2}{n_{1.}n_{2.}n_{.1}n_{.2}}. \qquad (1)$$

Гипотеза $H_0$ принимается на уровне значимости $\alpha$, если $\chi_B^2(1) < \chi_{1-\alpha}^2(1)$, если $\chi_B^2(1) \geq \chi_{1-\alpha}^2(1)$, то гипотеза $H_0$ отклоняется.

***Замечание.*** Критерий $\chi^2$ можно использовать при условии, что все ожидаемые частоты $\tilde{n}_{ij} = \dfrac{n_{i.}n_{.j}}{n} > 3$, $i,\ j = 1, 2$ и $n > 20$. Для малых $n$ при вычислении $\chi_B^2$ по формуле нужно $n$ заменить на $n - 1$; при этом должно быть $n_{1.} > 5$ и $n_{2.} > \dfrac{n_{1.}}{3}$.

Введем функции:

$$\mathbf{SUM\_CHIS}(u) := \mathbf{ELEMENT(ELEMENT}(u,1),1)\mathbf{ELEMENT(ELEMENT}(u,2),2) - \mathbf{ELEMENT(ELEMENT}(u,1),2)\mathbf{ELEMENT(ELEMENT}(u,2),1)$$

$$\mathbf{ZNAM}(u) := \mathrm{SUM\_GOR}(u,1)\cdot\mathrm{SUM\_GOR}(u,2)\cdot \sum_{i=1}^{\mathrm{DIMENSION}(u)} \mathrm{ELEMENT(ELEMENT}(u,i),1)\cdot \sum_{i=1}^{\mathrm{DIMENSION}(u)} \mathrm{ELEMENT(ELEMENT}(u,i),2)$$

$$\mathbf{HI\_BIN}(u) := \frac{\mathrm{SUM\_CHIS}(u)^2}{\mathrm{ZNAM}(u)}\cdot\mathrm{SUM\_VSE}(u)$$

$$\mathbf{VEC\_GOR}(u) := \mathbf{VECTOR(SUM\_GOR}(u,i),i,1,2)$$

$$\mathbf{VEC\_VERT}(u) := \mathbf{VECTOR(SUM\_VER}(u,m),m,1,2)$$

$$\mathbf{TEST\_BIN}(a,b,u) := \frac{ab}{\mathrm{SUM\_VSE}(u)}$$

## ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Исследуются два производственных процесса изготовления поршневых колец. Используя критерий Пирсона, проверьте гипотезу о равенстве процентов брака в обоих процессах по следующим данным при $\alpha = 0.01$:

| | 1 процесс | 2 процесс |
|---|---|---|
| годные | 195 | 149 |
| бракованные | 5 | 2 |

Решение.

1. Введем v: = [[195, 149], [5, 2]] .

2. Выясним, можно ли применить критерий Пирсона.

VEC_GOR(v) ↲ S ↲. Результат: [344,7].

VEC_VERT(v) ↲ S ↲. Результат: [200, 151].

В каждой паре полученных чисел выбираем меньшие.

TEST_BIN(7,151, v) ↲ S ↲. Результат: 3.01139.

Так как полученное число больше 3, критерий можно применить.

3. Найдем $\chi_B^2$.

**HI_BIN**(v) ↲ X ↲. Результат: 0.608275 . $\chi_B^2$ =0.608275.

4. $\chi_{1-0.01}^2(1) = 6.63$.

5. $\chi_B^2 < 6.63$. Следовательно, гипотеза не принимается.

Ответ: гипотеза отвергается.

**Задача 2.** 1000 человек классифицировали по признаку дальтонизма. По данным, приведенным в таблице, проверить, есть ли зависимость между наличием дальтонизма и полом человека, при $\alpha = 0.05$.

| | мужчины | женщины |
|---|---|---|
| дальтоники | 38 | 6 |
| недальтоники | 442 | 514 |

Ответ: да, зависимость есть.

**Задача 3.** Во время эпидемии гриппа изучалась эффективность прививок против этого заболевания. Получены следующие результаты:

| С прививкой | | Без прививки | |
|---|---|---|---|
| заболели | не заболели | заболели | не заболели |
| 4 | 192 | 34 | 111 |

Указывают ли эти результаты на эффективность лекарства? Принять $\alpha = 0{,}01$.

# ЧАСТЬ 3
# СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

## МЕНЮ СИСТЕМЫ DERIVE

Понять смысл команды легко, если знать перевод соответствующего слова. В данном подразделе приведены команды меню системы с объяснением назначения команды, в большинстве случаев даны также указания для пользователя и их перевод. Это поможет пользователям при работе с системой. Знакомство с этим подразделом поможет вам оценить возможности системы.

Следует иметь в виду, что возможности разных версий системы отличаются друг от друга. Естественно, чем выше номер, тем большими возможностями обладает система. Это сказывается и на меню. В некоторых случаях меню разных версий немного отличаются друг от друга (в основном эти отличия коснулись команды **OPTIONS** режима **2D-plot**). Если вы встретитесь с такой ситуацией, читайте первую часть книги, в ней есть сравнения меню версий 1.57, 2.02, 2.6.

### Меню режима алгебры

**COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage Option Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX**

**Enter option** – введите опцию.
**Author** – ввод нового выражения.
**Build** – составление выражения.
**Calculus** – в подменю этой команды собраны встроенные функции математического анализа.

**Declare** – объявление, задание (переменной, константы, вектора, матрицы).
**Expand** – разложение по степеням выражения или его части, раскрытие скобок.
**Factor** – разложение на множители выражения или его части.
**Help** – получение быстрой подсказки.
**Jump** – переход на строку с указанным номером (меткой).
**soLve** – решение уравнения, неравенства или системы линейных уравнений.
**Manage** – управление (см. ниже).
**Options** – опции; в подменю этой команды собраны разнообразные команды (см. ниже).
**Plot** – построение графика (под)выражения.
**Quit** – выход из Derive.
**Remove** – удаление выражения с указанными метками.
**Simplify** – упрощение (под)выражения.
**Transfer** – передача.
**moVe** – перемещение выражения; указываются метки перемещаемых строк и метка строки, перед которой будут находиться перемещаемые строки.
**Window** – окно; в подменю этой команды собраны команды для работы с окнами.

***

**CALCULUS: Differentiate Integral Limit Product Sum Taylor**

Встроенные функции математического анализа.

**Differentiate** – дифференцирование выражения.
**Integrate** – интегрирование выражения.
**Limit** – нахождение предела выражения.
**Product** – нахождение произведения в замкнутой форме.
**Sum** – нахождение суммы в замкнутой форме.
**Taylor** – разложение функции в ряд Тейлора.

***

**DECLARE: Function Variable Matrix vectoR**

Смотрите также пункт **«Команды Declare, Factor, Manage»** в справочной части книги.

**DECLARE** – объявлять, определять.
**Function** – функция.
**Variable** – переменная.
**Matrix** – матрица.
**vectoR** – вектор.

**DECLARE FUNCTION name:** – определить функцию.
**Enter name** – введите имя (определяемой функции).

**DECLARE FUNCTION value:**

**Enter expression** – введение выражения.

**DECLARE VARIABLE name:** – объявление, задание имени переменной.
**Enter name or type «default»** – ввод имени (определяемой переменной) или напечатайте «default».

**DECLARE VARIABLE: Domain Value** – задайте область определения переменной.

**DECLARE VARIABLE DOMAIN: Positive Nonnegative Real Complex Interval** – указание диапазона изменения переменной (указываются возможные варианты).

**Positive** – положительная.
**Nonnegative** – неотрицательная.
**Real** – действительная.
**Complex** – комплексная.
**Interval** – принадлежит интервалу (требуется указать интервал, которому принадлежит переменная).

**Select domain of** <введенное имя> – выбор нужного диапазона.

**DECLARE VECTOR:Dimension:** – введите число элементов определяемого вектора.
**Enter number of elements** – введите число элементов вектора.

**VECTOR element:** – элемент вектора.
**Enter vector element 1** – ввод первого элемента вектора.

***

**EXPAND expression:** – разложенные по степеням выражения, раскрытие скобок.
**Enter expression:** – ввод выражения.

**Примечание.**
Можно указывать метку строки. Например,
**EXPAND expression:#5** – раскрытие скобок (или разложение по степеням) выражения с меткой 1. Если надо применить команду к части строки, следует эту часть выделить курсором окна алгебры, используя клавиши-стрелки.

***

**FACTOR:Amount:Trivial Squarefree Rational raDical Complex** – разложение на множители.

См. также пункт **«Команды Declare, Factor, Manage»** в справочной части книги.

**Amount** – итог, результат.
**Trivial** – обычное.
**Squarefree** – свободное от квадратов.
**Rational** – рациональное.
**RaDical** – с радикалами.
**Complex** – над полем комплексных чисел.

**Select amount of factoring** – выбор вида результата разложения на множители.

**Примечание.**
Можно указывать метку строки, например,
**FACTOR expression:#1** – разложение на множители выражения с меткой 1. Если надо применить команду к части строки, следует эту часть выделить курсором окна алгебры, используя клавиши-стрелки.

***

**JUMP to:** – перемещение выражения.
**Enter label number** – введите метку строки, на которую надо установить курсор окна алгебры.

***

**soLve expression:#1**
**SOLVE** – решение. Решение уравнения, неравенства, системы уравнений или неравенств, выражение указанной переменной через остальные.

***

**MANAGE: Branch Exponential Logarithm Ordering Substitute Trigonometry**
См. также пункт **«Команды Declare, Factor, Manage»** в справочной части книги.
**MANAGE** – управление.
**MANAGE BRANCH:Principal Real Any** – выбор ветви корней.
**Select preferred branch for roots** – выбор предпочитаемой ветви для корней.
**Principal** – главное значение корня.
**Real** – действительное значение корня (если оно существует).
**Any** – произвольное значение корня.

**MANAGE EXPONENTIAL:Direction:Auto Collect Expand**
**Exponentions transformations** – экспоненциальные преобразования.

| | | |
|---|---|---|
| **Direction** | – | направление. |
| **Auto** | – | автоматическое; выбирается наиболее простой вид. |
| **Collect** | – | собрать (см. пункт **«Команды Declare, Factor, Manage»** в справочной части книги). |
| **Expand** | – | разложение на множители (см. пункт **«Команды Declare, Factor, Manage»** в справочной части книги). |

**MANAGE:Logarithm** – логарифмические преобразования. (См. пункт **«Команды Declare, Factor, Manage»** в справочной части книги).

**MANAGE ORDER variables: x y z** – упорядочивание переменных x, y, z.
**Enter variables in desired order** – ввод переменных в указанном порядке.

**MANAGE SUBSTITUTE value: <имя переменной>** – подстановка переменных или подвыражений.
**Enter replacement for <имя переменной>** – ввод имени замещаемой переменной.

**MANAGE SUBSTITUTE expression:**#3 – подстановка переменных в выражение с меткой 3.

**MANAGE TRIGONOMETRY:Direction:Auto Collect Expand Toward:Auto Sines Cosines** – тригонометрические преобразования.
(См. пункт **«Команды Declare, Factor, Manage»** в справочной части книги.)

**MANAGE TRIGONOMETRY:Direction:Auto Collect Expand Angle sums & multiple angles** – преобразование сумм и произведений углов.

**Direction** – направление.
**Auto** – автоматическое.
**Collect** – в «собранном» виде.
**Expand** – в «разложенном» виде.

**MANAGE TRIGONOMETRY:Toward:Auto Sines Cosines Trig power transformations** – Преобразование тригонометрических степеней.

**Toward** – к (по направлению к).
**Auto** – автоматическое (преобразование).
**Sines** – выразить через синусы.
**Cosines** – выразить через косинусы.

***

**OPTIONS:Color Display Execute Input Mute Notation Precision Radix**

**OPTIONS** – объекты выбора.

**Color** – цвет.
**Display** – установка режима дисплея.
**Execute** – выполнение команды DOS.
**Input** – установка для имен длины, чувствительности к регистру и режима клавиш-стрелок.
**Mute** – отключение звукового сигнала ошибки.
**Notation** – установка формата записи чисел.
**Precision** – установка режима точности вычислений.
**Radix** – установка основания систем счисления при вводе и выводе.

**OPTIONS COLOR:Menu Work**
**Menu** – установка цвета меню, строки сообщений и строки состояния.
**Work** – установка цвета области выражений.

**OPTIONS COLOR MENU:Frame:<> Option:<> Prompt:<> Status:<> Background:<> Border:<>**

**Frame** – рамка.
**Option** – опции (объекты выбора).
**Prompt** – сообщение (номер цвета строки сообщений).
**Status** – состояние (номер цвета строки состояния).
**Background** – фон.
**Border** – граница (номер цвета границы).
**Enter color number** – введите номер цвета.

**OPTIONS COLOR WORK:Foreground:<> Background:<>**

**Foreground** – передний план.
**Background** – фон.

**OPTIONS DISPLAY:Mode: Text Graphics Reso:Medium High Set:Standard Extended Adapter:<перечень адаптеров>**

**Mode** – режим.
**Text** – текстовый.
**Graphics** – графический.

**OPTIONS DISPLAY: Reso:Medium High**

**Reso** – разрешение.
**Medium** – среднее.
**High** – высокое.

**OPTIONS DISPLAY:Set:Standard Extended**

**Set** – установка.
**Standard** – стандартная.
**Extended** – расширенная.
Стандартная – набор символов ASCII, расширенная – набор символов ASCII плюс 128 знаков (основные греческие буквы и математические знаки).

**OPTIONS DISPLAY:Adapter:<перечень адаптеров>** – выбор типа адаптера.

**OPTIONS DISPLAY Mode: Text Graphics**
**Select display mode** – выбор режима работы дисплея (текстовой или графический).

**OPTIONS DISPLAY Reso:Medium High**
**Select resolution** – выбор разрешения (среднее или высокое).

**OPTIONS DISPLAY Set:Standard Extended**
**Select character set** – выбор характера установки дисплея: стандартная или расширенная.

**OPTIONS DISPLAY Adapter:<перечень адаптеров>**
**Select display adapter** – выбор типа адаптера.

**OPTIONS INPUT:Mode:Character Word Case:Intensive Sensitive** – выбор режима ввода.

**OPTIONS MUTE:Active:Yes/No** – подключение звукового сигнала ошибки.
**Mute warning message**

**Active** – активный (звуковой сигнал)
**Yes** – да (есть звуковой сигнал).
**No** – нет (сигнала нет).

**OPTIONS NOTATION:Style:Decimal Mixed Rational Scientific Digits:**<число> – стиль записи числа.

**OPTIONS NOTATION:Style:Decimal Mixed Rational Scientific Enter numerical output style** – указание стиля вывода числа на экран.

**Style** – стиль.
**Decimal** – с десятичной точкой.
**Mixed** – в смешанной форме; система сама выбирает способ представления числа: рациональное, с десятичной точкой или в показательной форме.
**Rational** – в виде рациональной дроби.
**Scientific** – в показательной форме (удобно, если числа очень маленькие или очень большие).

**OPTIONS NOTATION:Digits:**<число> **Enter significant digits to display** – указание количества знаков в числе, выводимом на дисплей.
**Digits** – знаки.

**OPTIONS PRECISION:Mode:Approximate Exact Mixed Digits:<число>**

**OPTIONS PRECISION:Mode:Approximate Exact Mixed Select arithmetic mode**

**Mode** – режим
**Approximate** – приближенный.
**Exact** – точный.
**Mixed** – смешанный.

**OPTIONS PRECISION:Digits:<число> Select significant digits** – указание количества знаков в числе, выводимом на экран.

**OPTIONS RADIX:Input:<число> Output<число>** – указание системы счисления, в которой число вводится и в которой оно выводится на экран.
**Enter base between 2 and 36** – введите основание системы счисления от 2 до 36.

**RADIX** – основание системы счисления.
**Input** – указание основания системы счисления для вводимого числа.
**Output** – указание основания системы счисления для выводимого на экран числа.

***

**SIMPLIFY EXPRESSION:#<номер> Enter expression** – введите выражение.
Упрощение выражения: метка строки.
См. первую часть книги.

***

**TRANSFER:Load Save Merge Clear Demo Print**
**Enter option** – указание опции.

**TRANSFER** – перемещение.

В подменю этой команды собраны команды работы с файлами. Подробнее смотрите об этом в первой части книги.

**Load** – ввести (файл).
**Save** – сохранить (файл).
**Merge** – присоединить; к существующим строкам добавить строки из файла.
**Clear** – очистить; удаляются все строки из текущего окна алгебры, очищаются все определенные пользователем константы, функции и переменные в системе.
**Demo** – ввести демонстрационный файл (файл с расширением demo).
**Print** – напечатать строки (на принтере или в текстовый файл).

**TRANSFER LOAD:Derive State Utility** – см. первую часть книги.

**TRANSFER SAVE: Derive Basic Fortran Pascal Options State** – см. первую часть книги.

**TRANSFER SAVE STATE file:DERIVE.INI** – см. первую часть книги.

**После нажатия на клавишу C, то есть обращения к TRANSFER Clear, в строке сообщений появляется запись Abandon expressions (Y/N)?** – покинуть выражения? Если вы не хотите сохранить введенные строки, отвечайте «да», то есть нажмите на клавишу с буквой **Y**. Иначе запишите предварительно строки в файл.

**TRANSFER DEMO file:** – см. первую часть книги.

**TRANSFER PRINT:Printer File Layout Options** – см. первую часть книги.
После нажатия на клавишу **P**, то есть после выбора **TRANSFER PRINT Printer**, в строке сообщений появляется запись **Printing expression#1**, то есть печатается выражение (строка) с меткой 1.

Если принтер отключен, появляется сообщение:
**White fault error writing device PRN**
**Abort, Retry, Ignore, Fail?**
**Abort** – удалить.
**Retry** – повторить.
**Ignore** – игнорировать.
**Fail** – файл.

**TRANSFER PRINT FILE file:** – см. первую часть книги.

**TRANSFER PRINT LAYOUT:Length:<> Width<> Top:<> Bottom:<> Left:<> Right:<>**
Установка размеров страницы и отступов при печати.

**Length** – длина.
**Width** – высота.
**Top** – отступ сверху.
**Bottom** – отступ снизу.
**Left** – отступ слева.

**Right** – отступ справа.
**Enter page lines** – ввод числа строк на странице.
**Enter page columns** – ввод числа столбцов на странице.
**Enter margin lines** – ввод величины отступа.

**TRANSFER PRINT OPTIONS:Range:All Some Set: Standard Extended Expression height:<>**

**TRANSFER PRINT OPTIONS:Range:All Some Set: Standard Extended Expression height:<>**

**TRANSFER PRINT OPTIONS:Range:All Some**
**Set print range** – выбор диапазона печати.
**Range** – диапазон (печатаемых строк).
**All** – все.
**Some** – некоторые.

**TRANSFER PRINT OPTIONS: Set: Standard Extended**
**Select character set** – выбор набора символов.

**Set** – установка.
**Standard** – стандартная.
**Extended** – расширенная.

**TRANSFER PRINT OPTIONS:Expression height:<>**

**Enter maximum value** – ввод наибольшей величины (печатаемых символов).

**MOVE:Before:<> Start:<> End:<>**

**Enter label number** – ввод метки (номера) строки.
**Before** – перед (введите метку строки, перед которой должна стоять перемещаемая строка).
**Start** – начало (ввод метки первой из перемещаемых строк).
**End** – конец (ввод метки последней из перемещаемых строк).

***

**WINDOW:Close Designate Flip Goto Next Open**

**Window** – окно

**WINDOW CLOSE:Window:** – закрытие окна.
**Enter window number** – ввод номера (закрываемого) окна.

**WINDOW DESIGNATE:Type:Algebra 2D-plot 3D-plot** – задание типа окна.

| | | |
|---|---|---|
| **Enter window type** | – | ввод типа окна. |
| **Type** | – | тип окна. |
| **Algebra** | – | окно алгебры. |
| **2D-plot** | – | окно графики. |
| **3D-plot** | – | окно графики (построение поверхностей). |

**WINDOW SPLIT:Horizontal Vertical** – разделение окна.

| | | |
|---|---|---|
| **Horizontal** | – | горизонтально. |
| **Vertical** | – | вертикально. |

| | | |
|---|---|---|
| **WINDOW:Flip** | – | переключение перекрывающихся окон (= **F2**). |
| **WINDOW:Goto** | – | переход к заданному окну. |
| **WINDOW:Next** | – | переход к следующему окну (= **F1**). |
| **WINDOW:Open** | – | открытие окна. |
| **WINDOW:Previous** | – | переход к предыдущему окну. |

***

## МЕНЮ РЕЖИМА 2D-PLOT

После нажатия на клавишу **P**, то есть выбора команды **Point**, появляется поле графики **2D-plot** и меню этого режима.

**COMMAND:Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window Zoom**

| | | |
|---|---|---|
| **Algebra** | – | переход в алгебраическое окно. |
| **Center** | – | центрирование окна по указателю. |

**Delete** – удаление.
**Help** – получение подсказки.
**Move** – установка указателя координат точки «+» в точку с введенными координатами.
**Options** – объекты выбора.
**Plot** – построение кривой.
**Quit** – выход из системы (как в окне алгебры).
**Scale** – управление масштабом построения (точное управление).
**Ticks** – сетка.
**Window** – окно (как в режиме алгебры).
**Zoom** – увеличение: управление масштабом построения (быстрое управление).

***

**DELETE:All But last First Last** – удалите графики.

**All** – все.
**But last** – все, кроме последнего.
**First** – первый.
**Last** – последний.

***

**MOVE:x:<> y:<>** – передвижение указателя в точку с заданными координатами x и y.
**Enter cross coordinates** – ввод координаты указателя координат точки «+».

***

**OPTIONS:Accuracy Color Display Execute Mute Notation Precision Radix State**

**OPTIONS ACCURACY:<>**
**Accuracy** – задание тщательности построения кривой.
**Enter plot accuracy (0 to 9)** – ввод тщательности рисования графика (от 0 до 9). Чем выше номер, тем большая тщательность.

**OPTIONS COLOR:Auto Plot Menu Work** – опции выбора цвета.

**Auto** – выключение автоматической смены цветов графиков.
**Plot** – установление цвета графика и осей.
**Menu** – установление цвета меню, строки сообщений и строки состояния.
**Work** – установление цвета фона области построения.

**OPTIONS COLOR AUTO:Change:Yes No**
**Auto change color** – автоматическая смена цвета графика.
**Change** – изменение.
**Yes** – да.
**No** – нет.

**OPTIONS COLOR PLOT:Next plot:<> Axes:<> Cross:<>** – выбор цвета графика, координатных осей, указателя «+».
**Enter color number** – ввод номера цвета.
**Next plot** – цвет следующего построения.
**Axes** – указание цвета осей.
**Cross** – указание цвета указателя «+».

**OPTIONS COLOR MENU:Frame:<> Option:<> Prompt:<> Status:<> Background:<> Border:<>** – как в режиме алгебры.

**OPTIONS COLOR WORK: Background:<> Border:<>** – как в режиме алгебры.

**OPTIONS DISPLAY:** – как в режиме алгебры.

**OPTIONS Execute** – как в режиме алгебры.
**Enter DOS command** – ввод команды DOS (как в режиме алгебры).

**OPTIONS MUTE:Active:Yes/No** – как в режиме алгебры.

**OPTIONS NOTATION:** – как в режиме алгебры.
**OPTIONS PRECISION:** – как в режиме алгебры.
**OPTIONS RADIX:** – как в режиме алгебры.

**OPTIONS STATE:Coordinates:Rectangular Polar Mode: Connect Discrete Size:Large Small** – выбор системы координат, построение соединительных отрезков и размер точек.

**Coordinates** – координаты.
**Rectangular** – прямоугольные декартовы координаты.
**Polar** – полярные координаты.

**OPTIONS STATE:Mode:Connect Discrete Select plot point mode** – выбор режима печати точек.

**OPTIONS STATE:Size:Large Small Select plot point size** – выбор размера точек.

***

**QUIT**: выход из системы Derive (как в режиме алгебры).

***

**SCALE: x scale:<> y scale:<>**
**Enter units per tick mark** – ввод шкалы (число единиц на деление).

***

**TICKS:Rows:<> Columns:<>**
**TICK** – сетка.

**TICKS:Rows**
**Enter rows per tick mark** – ввод числа строк на деление.

**TICKS:Columns**
**Enter columns per tick mark** – ввод числа столбцов на деление.

***

**WINDOW**: – команды работы с окнами (как в режиме алгебры).

***

**ZOOM:Axis: Both X Y Direction: In/Out**

**ZOOM:Axis: Both X Y**
**Select zoom axis** – выбор изменения масштаба осей.

**ZOOM:Direction: In/Out**
**Select zoom direction** – выбор направления изменения масштаба.

**In** – увеличить.
**Out** – уменьшить.

***

## РЕЖИМ 3D-PLOT

**COMMAND:Algebra Center Eye Focal Grids Hide Options Plot Quit Window Zoom**

**Algebra** – переход в алгебраическое окно.
**Center** – установка координат центра «коробки».
**Eye** – установка координат глаза наблюдателя.
**Focal** – установка координат фокальной точки.
**Grids** – установка числа элементов рисуемой поверхности.
**Hide** – контроль изображения невидимых линий.
**Length** – установка длины сторон «коробки», в которой заключена построенная поверхность (график функции двух переменных).

***

**CENTER:x:<> y:<> z:<> Auto: Yes/No**
**CENTER:x:<> y:<> z:<>**
**Enter coordinates** – ввод координат.
**CENTER:Auto: Yes/No**
**Auto z coordinate**

***

**EYE:x:<> y:<> z:<> Auto: Yes/No** – установка координат «глаза наблюдателя».
**EYE:x:<> y:<> z:<>**
**Enter coordinates** – введите координаты глаза наблюдателя.

**EYE:Auto:Yes/No**
**Auto z coordinate** – автоматический выбор значения координаты z.
**Yes** – да. **No** – нет.

***

**FOCAL:x:<> y:<> z:<> Auto: Yes/No** – установка координаты фокальной точки.
**FOCAL:x:<> y:<> z:**
**Enter coordinates** – указание направлений осей.
**FOCAL:Auto:Yes/No**
**Auto z coordinate** – автоматическое определение направления оси Z.

**GRIDS:x:<> y:<>** – установка числа элементов рисуемой поверхности.
**Enter grid panel** – введите число ячеек решетки.

***

**HIDE:Lines:Yes/No** – контроль изображения невидимых линий.
**Remove hidden lines** – удаление невидимых линий.

***

**LENGTH:x:<> y:<> z:<> Auto: Yes/No** – установка длины сторон «коробки», в которую помещен образ рисуемой поверхности.
**LENGTH:x:<> y:<> z:<>**
**Enter interval length** – введите длину интервала.

**LENGTH:Auto: Yes/No**
**Auto z length** – длина по z определяется автоматически.

***

**OPTIONS:Axes Color Display Execute Mute Notation Precision Radix**

**Axes** – управление изображением осей.
**Color** – установка цвета верхней и нижней поверхностей и осей.

**Display** – установка режима дисплея.
**Execute** – выполнение команды DOS.
**Mute** – выключение звукового сигнала ошибки.
**Notation** – установка формата записи чисел.
**Precision** – установка режима точности вычислений.
**Radix** – установка основания систем счисления ввода/вывода.

**OPTIONS AXES:Display:Yes/No**
**Display axes**

**OPTIONS COLOR:Plot Menu Work**
**Plot** – установка цвета поверхности.
**Menu** – установка цвета меню, строки сообщений и строки состояния.
**Work** – установка цвет фона области построения.

**OPTIONS COLOR PLOT:Top:<> Bottom:<> Axes:<>**
**Top** – верх.
**Bottom** – низ.
**Axes** – оси.
**Enter color number** – введите номер цвета.

**OPTIONS COLOR MENU:** – как в режиме 2D-plot.
**OPTIONS COLOR WORK:** – как в режиме 2D-plot.
**OPTIONS DISPLAY:** – как в режиме алгебры.
**OPTIONS EXECUTE:** – как в режиме алгебры.
**OPTIONS MUTE:** – как в режиме алгебры.
**OPTIONS NOTATION:** – как в режиме алгебры.
**OPTIONS PRECISION:** – как в режиме алгебры.
**OPTIONS RADIX:** – как в режиме алгебры.

**Quit:** – выход из системы (как в режиме алгебры).

***

**WINDOW:** – работа с окнами (как в режиме алгебры).

***

**ZOOM:** – изменить в 2 раза размер прозрачной «коробки», в которую помещен образ построенной поверхности.

# ПОДРОБНОСТИ О КОМАНДАХ DECLARE, FACTOR, MANAGE

## Команда DECLARE

**DECLARE VARIABLE** – объявление переменной.
**POSITIVE** – положительная ( переменная ).
**NONNEGATIVE** – неотрицательная.
**REAL** – действительная.
**COMPLEX** – комплексная.
**DECLARE CONSTANT** – объявление константы.
Встроенные константы переопределить нельзя.

Derive содержит два файла, в которых определены константы для перевода выражений в соответствующую систему единиц: ENGLISH.MTH и METRIC.MTH.

**DECLARE FUNCTION** – определение функции.

## Команда FACTOR

Разложение на множители может быть пяти видов:

| | | |
|---|---|---|
| **FACTOR TRIVIAL** | – | обычное (тривиальное), |
| **FACTOR SQUAREFREE** | – | без квадратов, |
| **FACTOR RATIONAL** | – | рациональное, |
| **FACTOR RADICALS** | – | радикальное, |
| **FACTOR COMPLEX** | – | комплексное. |

## Команда MANAGE

**MANAGE BRANCH:Principal Real Any** – выберите ветвь корней.
**Select preferred branch for roots** – выберите предпочитаемую ветвь для корней.

**Principal** – главное значение корня.
**Real** – действительное значение корня (если оно существует).
**Any** – произвольное значение корня.

Если выбрано **MANAGE BRANCH Any**, то при упрощении $(x^2)^{1/2}$ превращается в $x$, а не в $|x|$, как в других случаях.

## MANAGE TRIGONOMETRY

### MANAGE TRIGONOMETRY DIRECTION EXPAND

$$\mathrm{SIN}(x+y) \to \mathrm{SIN}(x)\,\mathrm{COS}(y)+\mathrm{COS}(x)\,\mathrm{SIN}(y),$$
$$\mathrm{COS}(x+y) \to \mathrm{COS}(x)\,\mathrm{COS}(y)-\mathrm{SIN}(x)\,\mathrm{SIN}(y),$$
$$\mathrm{SIN}(nx) \to 2\,\mathrm{COS}((n-1)x)\,\mathrm{SIN}(x)+\mathrm{SIN}((n-2)x),$$
$$\mathrm{COS}(nx) \to 2\,\mathrm{COS}((n-1)x)\,\mathrm{COS}(x)-\mathrm{COS}((n-2)x).$$

Здесь $n$ – натуральное число, большее 1.

### MANAGE TRIGONOMETRY DIRECTION COLLECT

$$\mathrm{SIN}(x)\,\mathrm{SIN}(y) \to \frac{\mathrm{COS}(x-y)-\mathrm{COS}(x+y)}{2},$$
$$\mathrm{COS}(x)\,\mathrm{COS}(y) \to \frac{\mathrm{COS}(x-y)+\mathrm{COS}(x+y)}{2},$$
$$\mathrm{SIN}(x)\,\mathrm{COS}(y) \to \frac{\mathrm{SIN}(x-y)+\mathrm{SIN}(x+y)}{2},$$
$$\mathrm{SIN}^n x \quad \to \quad \frac{\mathrm{SIN}^{n-2}(x)(1-\mathrm{COS}(2x))}{2},$$
$$\mathrm{COS}^n x \quad \to \quad \frac{\mathrm{COS}^{n-2}(x)(1+\mathrm{COS}(2x))}{2}.$$

### MANAGE TRIGONOMETRY DIRECTION AUTO

Выполняются только те преобразования, которые ведут к сокращению выражения.

### MANAGE TRIGONOMETRY TOWARD SINES

$$\mathrm{COS}^2(x) \to 1-\mathrm{SIN}^2(x).$$

### MANAGE TRIGONOMETRY TOWARD COSINES

$$\mathrm{SIN}^2(x) \to 1-\mathrm{COS}^2(x).$$

## MANAGE TRIGONOMETRY TOWARD AUTO

Выполняются только те преобразования, которые ведут к сокращению выражения.

## MANAGE EXPONENTIAL
## MANAGE EXPONENTIAL EXPAND

$$e^{x+y} \to e^x e^y$$

$$e^{kx} \to (e^x)^k$$

## MANAGE EXPONENTIAL COLLECT

$$e^x e^y \to e^{x+y}$$

$$(e^x)^k \to e^{kx}$$

## MANAGE EXPONENTIAL AUTO

Выполняется преобразование к наиболее компактному виду.

## MANAGE LOGARITHM

Необходимо указывать, какие значения могут принимать переменные при помощи команды Declare.

## MANAGE LOGARITHM EXPAND

$$\mathrm{LN}(xy) \to \mathrm{LN}(x) + \mathrm{LN}(y)$$

$$\mathrm{LN}(x^k) \to k\,\mathrm{LN}(x)$$

## MANAGE LOGARITHM COLLECT

$$\mathrm{LN}(x) + \mathrm{LN}(y) \to \mathrm{LN}(xy)$$

$$k\,\mathrm{LN}(x) \to \mathrm{LN}(x^k)$$

## MANAGE LOGARITHM AUTO

Выполняется преобразование к наиболее компактному виду.

# ФУНКЦИИ, КОНСТАНТЫ И ОПЕРАТОРЫ СИСТЕМЫ DERIVE

Некоторые функции системы не рассмотрены в книге. Однако легко понять, как их использовать, обратившись к подсказкам системы или к этому подразделу книги.

Derive умеет аппроксимировать и (или) упрощать перечисленные функции, константы и операторы. Если задать числовые аргументы в приближенном режиме, они вычисляются приблизительно с заданной точностью. В противном случае они алгебраически упрощаются. Многие преобразования выполняются автоматически; некоторые выполняются только после требования с помощью команды Manage.

Следует иметь в виду, что некоторые из перечисленных функций есть только начиная с версии 2.02, другие – с версии 2.6. К таким функциям относятся функции **IF, MOD, MODS, LH, RHS** и некоторые другие.

## Константы

**#e** или **Alt-E** или **EXP(1)** – основание натурального логарифма → И.
**#i** или **Alt-I** – мнимая единица (квадратный корень из –1) → М.
**pi** или **Alt-P** – площадь единичного круга → у.
**deg** – радианная мера градуса (равно pi/180).
**inf** – ввод плюс бесконечности ( + ∞ )→ ь.
**–inf** – ввод минус бесконечности ( – ∞ ) → –ь.

## Операторы

+ плюс,
– минус или разность,
* произведение,
/ частное,
^ возведение в степень,
% процент,
! факториал.

## Операторы сравнения

= равно,
/= не равно,
< меньше,
<= меньше или равно,
> больше,
>= больше или равно.

## Решение уравнений и неравенств

**SOLVE** ($u, x$) – решение уравнения $u = 0$ относительно $x$.
**SOLVE** ($u = v, x$) – решение уравнения $u = v$ относительно $x$.
**SOLVE** ($u < v, x$) – решение неравенства $u < v$ относительно $x$.
**SOLVE** ($u = v, x, a, b$) – решение уравнения $u = v$ относительно $x$ в интервале $[a, b]$ в приближенном режиме.
**SOLVE** ($[u_1 = v_1, u_2 = v_2, ...], [x_1, x_2, ...]$) – решение системы, линейной относительно $x_1, x_2, ...$

## Экспоненциальные функции

**SQRT** ($z$) – квадратный корень из $z$.
**EXP** ($z$) – #e в степени $z$.

## Логарифмические функции

**LN** ($z$) – натуральный логарифм $z$.
**LOG** ($z$) – натуральный логарифм $z$.
**LOG** ($z, w$) – логарифм $z$ по основанию $w$.

## Тригонометрические функции

**SIN** ($z$ **deg**) – синус $z$ градусов.
**SIN** (**z**) – синус $z$ радиан.
**COS** ($z$) – косинус $z$ радиан.
**TAN** ($z$) – тангенс $z$ радиан.
**COT** ($z$) – котангенс $z$ радиан.
**SEC** ($z$) – секанс $z$ радиан.
**CSC** ($z$) – косеканс $z$ радиан.

## Обратные тригонометрические функции (в радианах)

**ATAN** ($z$) – угол, тангенс которого равен $z$.
**ATAN** ($y$, $x$) – угол между осью абсцисс и радиус-вектором, соединяющим начало координат и точку ($x$, $y$).
**ACOT** ($z$) – угол, котангенс которого $z$.
**ACOT** ($x$, $y$) – угол между осью абсцисс и радиус-вектором, соединяющим начало координат и точку ($x$, $y$).
**ASIN** ($z$) – угол, синус которого $z$.
**ASEC** ($z$) – угол, секанс которого $z$.
**ACSC** ($z$) – угол, косеканс которого $z$.

## Гиперболические функции

**SINH** ($z$) – гиперболический синус $z$.
**COSH** ($z$) – гиперболический косинус $z$.
**TANH** ($z$) – гиперболический тангенс $z$.
**COTH** ($z$) – гиперболический котангенс $z$.
**SECH** ($z$) – гиперболический секанс $z$.
**CSCH** ($z$) – гиперболический косеканс $z$.

## Обратные гиперболические функции

**ASINH** ($z$) – обратный гиперболический синус $z$.
**ACOSH** ($z$) – обратный гиперболический косинус $z$.
**ATANH** ($z$) – обратный гиперболический тангенс $z$.
**ACOTH** ($z$) – обратный гиперболический котангенс $z$.
**ASECH** ($z$) – обратный гиперболический секанс $z$.
**ACSCH** ($z$) – обратный гиперболический косеканс $z$.

## Кусочно-непрерывные функции

**ABS (*x*)** – абсолютная величина $x$.
**SIGN (*x*)** – знак числа $x$.
**MAX (*x*, *y*, ...)** – максимальный из аргументов.
**MIN (*x*, *y*, ...)** – минимальный из аргументов.
**STEP (*x*)** – 1 при $x > 0$, возвращение 0 при $x < 0$,
**SIGN(*x*)** – 1 при $x > 0$, 0 при $x = 0$, –1 при $x < 0$.

**CHI** ($a, x, b$) – 1 при $a < x < b$, 0 при $x < a$ или $x > b$.
**FLOOR** ($m, n$) – наибольшее целое <= $m/n$.
**FLOOR** ($m$) – целая часть числа $m$.
**MOD** ($m, n$) – неотрицательный остаток от деления $m$ на $n$ ($m$ по модулю $n$).
**MOD** ($m$) – дробная часть числа $m$.
**MODS** ($m, n$) – симметричное $m$ по модулю $n$.
**GCD** ($m, n, ...$) – наибольший общий делитель чисел $m, n, ...$
**LCM** ($m, n, ...$) – наименьшее общее кратное $m, n, ...$
**NEXT_PRIME** ($n$) – следующее простое число, большее $n$.

## Функции комплексного переменного

**ABS** ($z$) – модуль $z$.
**SIGN** ($z$) – радиальная проекция $z$ на единичную окружность.
**RE** ($z$) – действительная часть $z$.
**IM** ($z$) – мнимая часть $z$.
**CONJ** ($z$) – комплексно сопряженное $z$.
**PHASE** ($z$) – фазовый угол $z$.

## Вероятностные функции

**z!** – $z$ факториал.
**GAMMA** ($z$) – гамма-функция от $z$.
**PERM** ($z, w$) – число перестановок из $z$ по $w$.
**COMB** ($z, w$) – число сочетаний из $z$ по $w$.
**RANDOM** ($n$) – если $n > 1$, то случайное целое в интервале $[0, n]$, если $n = 1$, то случайное число в интервале $[0, 1]$, если $n < 1$, то устанавливается текущее значение $n$ генератора случайных чисел, если $n = 0$, то устанавливает значение генератора случайных чисел по текущему времени.

## Статистические функции

**AVERAGE** ($z_1, ..., z_n$) – среднее арифметическое чисел $z_1, z_2, ..., z_n$.
**RMS** ($z_1, ..., z_n$) – среднее геометрическое чисел $z_1, z_2, ..., z_n$.
**VAR** ($z_1, ..., z_n$) – дисперсия.
**STDEV** ($z_1, ..., z_n$) – среднее квадратическое отклонение.

**FIT** (*v*, **A**) – многомерная линейная регрессия вектора *v*, задающего аргументы и функцию по матрице данных *A*.

## Функции ошибок

**ERF** (*z*) – функция ошибок.
**ERF** (*z*, *w*) – обобщенная функция ошибок.
**ERFC** (*z*) – дополнительная функция ошибок.
**NORMAL** (*z*, *m*, *s*) – нормальное распределение со средним *m* и средним квадратичным отклонением *s*.
**NORMAL** (*z*) – интегральное распределение по *z*.

## Финансовые функции

**PVAL** (i, nper, pmt, fval, time) – приведенная стоимость контракта.
**FVAL** (i, nper, pmt, pval, time) – будущая стоимость контракта.
**PMT** (i, nper, pval, fval, time) – периодические платежи.
**NPER** (i, pmt, pval, fval, time) – число платежных периодов.
**RATE** (nper, pmt, pval, fval, time, min, max) – периодическая процентная ставка.

## Аналитические функции

**LIM** $(u, x, a)$ – $\lim\limits_{x\to a} u(x)$ – предел $u$ при $x$, стремящемся к $a$.
**LIM** $(u, x, a, 1)$ – $\lim\limits_{x\to a+0} u(x)$ – предел $u$ при $x$, стремящемся к $a$ сверху.
**LIM** $(u, x, a, -1)$ – $\lim\limits_{x\to a-0} u(x)$ – предел $u$ при $x$, стремящемся к $a$ снизу.
**DIF** $(u, x)$ – $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ – производная $u$ по $x$.
**DIF** $(u, x, n)$ – $\dfrac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}x^n}$ – производная $n$-го порядка $u$ по $x$.
**TAYLOR** $(u, x, a, n)$ – приближение функции $u$ рядом Тейлора $n$-го порядка в окрестности точки $x = a$.
**INT** $(u, x)$ – $\int u(x)\,\mathrm{d}x$ – первообразная $u(x)$.
**DIF** $(u, x, -n)$ – первообразная $n$-го порядка $u(x)$.

**INT** $(u, x, a, b)$ – $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$ – определенный интеграл $u$ по $x$ в пределах от $a$ до $b$.
**SUM** $(u, n)$ – антиразность выражения $u$ по $n$.
**SUM** $(u, n, k, \mathrm{m})$ – $\sum_{n=k}^{m} u(n)$ – сумма $u$ при $n$, изменяющемся от $k$ до $m$.
**PRODUCT** $(u, n)$ – античастное $u$ по $n$.
**PRODUCT** $(u, n, k, m)$ – $\prod_{n=k}^{m} u(n)$ – произведение $u$ при $n$, изменяющемся от $k$ до $m$.

## Векторные функции

$[x_1, x_2, ..., x_n]$ – элементный вектор размерности $n$.
**VECTOR** $(u, k, n)$ – вектор, элементы которого образуются из выражения $u$ при $k$, изменяющемся от 1 до $n$ с шагом 1.
**VECTOR** $(u, k, m, n)$ – вектор, элементы которого образуются из выражения $u$ при $k$, изменяющемся от $m$ до $n$ с шагом 1.
**VECTOR** $(u, k, m, n, s)$ – вектор, элементы которого образуются из выражения $u$ при $k$, изменяющемся от $m$ до $n$ с шагом $s$.
**APPEND** $(v, w)$ – вектор элементов $v$, за которыми следуют элементы $w$.
**ELEMENT** $(v, n)$ – $n$-й элемент вектора $v$.
**DIMENSION** $(v)$ – число элементов вектора.
**ABS** $(v)$ – модуль (длина) вектора.
**v . w** – скалярное произведение векторов (использует точку).
**CROSS** $(v, w)$ – векторное произведение.

## Матричные функции

[[a, b], [c, d]] – матрица $2 \times 2$.
**IDENTITY_MATRIX** $(n)$ – единичная квадратная матрица $n \times n$.
**ELEMENT** $(\mathrm{A}, j, k)$ – элемент $j$-й строки и $k$-го столбца матрицы A.

**A.B** – скалярное произведение матриц A и B.
**A`** – транспонированная матрица A (На PC-9801 используйте символ йены).
**DET (A)** – определитель A.
**TRACE (A)** – след матрицы A (сумма диагональных элементов).
**A^–1** – обратная матрица к матрице A.
**ROW_REDUCE (A)** – ступенчатая форма матрицы A.
**ROW_REDUCE (A, B)** – ступенчатая форма матрицы A, расширенная матрицей B.
**CHARPOLY (A, mu)** – характеристический многочлен матрицы A относительно mu.
**EIGENVALUES (A, mu)** – собственные значения A матрицы A.

## Векторный анализ

**GRAD (expn)** – градиент expn в системе координат с переменными $x$, $y$ и $z$.
**GRAD (expn, *v*)** – градиент expn в системе координат с переменными из вектора $v$.
**GRAD (expn, A)** – градиент expn в системе координат A.
**DIV (*v*, A)** – дивергенция вектора $v$.
**LAPLACIAN (expn, A)** – дивергенция градиента expn.
**CURL (*v*, A)** – ротор вектора $v$.

Интегральное векторное счисление
**POTENTIAL (*v*)** – скалярный потенциал вектора $v$.
**POTENTIAL (*v*, *w*)** – потенциал вектора $v$ с начальными координатами $w$.
**POTENTIAL (*v*, *w*, A)** – потенциал вектора $v$ в системе координат A.
**VECTOR_POTENTIAL(*v*, *w*, A)** – векторный потенциал вектора $v$.

## Функции ITERATE и ITERATES

**ITERATES** $(u, x, x_0)$ – выдает вектор $[x_0, u(x_0), u(u(x_0)),...]$ до тех пор, пока элементы не начинают повторяться.
**ITERATES** $(u, x, x_0, n)$ – выдает первые $n + 1$ элементов вектора $[x_0, u(x_0), u(u(x_0)),...]$.

**ITERATE** $(u, x, x_0)$ – выдает первый повторяющийся элемент в последовательности $x_0, u(x_0), u(u(x_0))$, ...
**ITERATE** $(u, x, x_0, n)$ – выдает $n$ + 1-й элемент в последовательности $x_0, u(x_0), u(u(x_0))$, ...

## Функция IF

**IF** ***(r, t, f)*** – если отношение *r* истинно, то выдает выражение *t*; если оно ложно, то выдает выражение *f*.
**IF (*r, t, f, u*)** – если отношение *r* истинно, то выдает выражение *t*; если оно ложно, то выдает выражение *f*; а если истинность неизвестна, то выдает *u*.
**IF (*r* AND *s, t, f*)** – если отношение *r* ложно, выдает выражение *f*; в противном случае выдает IF(*s*, *t*, *f*).
**IF (*r* OR *s, t, f*)** – если отношение *r* истинно, выдает выражение *t*; в противном случае выдает IF(*s*, *t*, *f*).
**IF (NOT *r, t, f*)** – если отношение *r* ложно, выдает выражение *t*; если оно истинно, выдает выражение *f*.

## Функции LHS и RHS

**LHS (*r*)** – возвращает левую часть отношения *r*.
**RHS (*r*)** – возвращает правую часть отношения *r*.

# СПРАВКИ О КЛАВИШАХ

## Специальные клавиши

| | | |
|---|---|---|
| **Backspace** | – | удалить символ слева от курсора. |
| **Del** | – | удалить символ над курсором. |
| **Enter** | – | ввести строку текста. |
| **Ctrl-Enter** | – | ввести и упростить строку текста. |
| **Esc** | – | прервать редактирование и вернуться в меню. |
| **Ins** | – | переключить режим вставки/замены. |
| **F6** | – | переключить режим клавиш-стрелок (строчный_редактор/выделение_подвыражений). |
| **F3** | – | вставить выделенное выражение. |
| **F4** | – | вставить выделенное выражение, заключив его в скобки. |

## Команды управления курсором

В режиме выделения выражений клавиши-стрелки не работают:

**Ctrl-S** – влево на символ.
**Ctrl-D** – вправо на символ.
**Ctrl-A** – влево на слово.
**Ctrl-F** – вправо на слово.
**Ctrl-Q** S или **Home** – к левому краю строки.
**Ctrl-Q D** или **End** – к правому краю строки.

## Команды удаления текста

**Ctrl-H** – удаление символа слева от курсора (= **Backspace**).
**Ctrl-G** – удаление символа над курсором (= **Del**).
**Ctrl-T** – удаление слова, начинающегося над курсором.
**Ctrl-Y** – удаление всей строки.
**Ctrl-Q Y** – удаление правой части строки.
**Ctrl-Q H** – удаление левой части строки.

## Разные команды

**Ctrl-M** – ввод строки текста (= **Enter**).
**Ctrl-J** – ввод и упрощение строки текста (= **Ctrl-Enter**).
**Ctrl-[** – прерывание редактирования и возвращение в меню (= **Esc**).
**Ctrl-V** – переключение режима вставки/замены (= **Ins**).
**Ctrl-U** – вставка предыдущей строки текста.

## Команды выделения выражений

↑ ( стрелка вверх ) или **Ctrl-E** – переход вверх на одно выражение.
↓ ( стрелка вниз ) или **Ctrl-X** – переход вниз на одно выражение.
**Ctrl-R** или **PgUp** – переход вверх на пол-экрана.
**Ctrl-C** или **PgDn** – переход вниз на пол-экрана.
**Ctrl-PgUp** или **Ctrl-Home** – переход вверх на первое выражение.

**Ctrl-PgDn** или **Ctrl-End** – переход вниз на последнее выражение.
**Ctrl-F** или **Ctrl** - → – передвижение выражения влево.
**Ctrl-A** или **Ctrl** - ← – передвижение выражение вправо.

## Команды выделения подвыражений

→ ( стрелка вправо ) – передвижение на один операнд вправо.
← ( стрелка влево ) – передвижение на один операнд влево.
**Home** – переход к крайнему левому операнду.
**End** – переход к крайнему правому операнду.
**Ctrl-E** или стрелка вверх ↑ – переход на один уровень вверх.
**Ctrl-X** или стрелка вниз ↓ – переход на один уровень вниз.

## Ввод греческих букв, специальных констант и операторов

Справа указаны буквы, которые появляются на экране при наличии кириллицы в альтернативной кодировке.

| | | |
|---|---|---|
| **Alt-A** α | (альфа) | → р |
| **Alt-M** μ | (мю) | → ц |
| **Alt-B** β | (бета) | → с |
| **Alt-P** π | (пи) | → у |
| **Alt-G** γ | (гамма) | → т |
| **Alt-S** σ | (сигма) | → х |
| **Alt-D** δ | (дельта) | → ы |
| **Alt-T** τ | (тау) | → ч |
| **Alt-N** ε | (эпсилон) | → ю |
| **Alt-F** ϕ | (фи) | → ш |
| **Alt-H** θ | (тета) | → щ |
| **Alt-O** ω | (омега) | → ъ |

**Alt-E #e** – основание натурального логарифма → И.
**Alt-I #i** – квадратный корень из –1 → М.
**Alt-Q SQRT** – функция квадратного корня.

## Команды функциональных клавиш алгебраического окна

**F1** – переход к следующему окну.
**F2** – переключение перекрывающихся окон.
**F3** – вставка выделенного выражения.
**F4** – вставка выделенного выражения, заключенного в скобки.
**F5** – переключение на предыдущий режим дисплея.
**Shift-F10** – печать всего экрана.
**Shift-F9** – печать текущего окна.
**Ctrl-F10** – запись экрана в TIF-файл.
**Ctrl-F9** – запись текущего окна в TIF-файл.

## Команды функциональных клавиш окна двумерной графики

**F1** – переход к следующему окну.
**F2** – переключение перекрывающихся окон.
**F5** – переключение на предыдущий режим дисплея.
**F7** – увеличение размера графика по оси ординат.
**F8** – уменьшение размера графика по оси ординат.
**Shift-F7** – увеличение размера графика по оси абсцисс.
**Shift-F8** – уменьшение размера графика по оси абсцисс.
**F9** – увеличение размера графика по обеим осям.
**F10** – уменьшение размера графика по обеим осям.
**Shift-F10** – запись всего экрана.
**Shift-F9** – печать текущего окна.
**Ctrl-F10** – запись всего экрана в TIF-файл.
**Ctrl-F9** – запись текущего окна в TIF-файл.

## Команды функциональных клавиш окна трехмерной графики

**F1** – переход к следующему окну.
**F2** – переключение перекрывающихся окон.
**F5** – переключение на предыдущий режим дисплея.
**F7** – увеличение размера графика по оси *y*.
**F8** – уменьшение размера графика по оси *y*.

**Shift-F7** – увеличение размера графика по оси *x*.
**Shift-F8** – уменьшение размера графика по оси *x*.
**F9** – увеличение размера графика по обеим осям.
**F10** – уменьшение размера графика по обеим осям.
**Shift-F10** – печать всего экрана.
**Shift-F9** – печать текущего окна.
**Ctrl-F10** – запись всего экрана в TIF-файл.
**Ctrl-F9** – запись текущего окно в TIF-файл.

## ФУНКЦИИ ФАЙЛОВ УТИЛИТ

Вместе с системой Derive поставляются файлы-утилиты, в которых собраны многочисленные функции, решающие самые разнообразные задачи. Название функции объясняет ее смысл, поэтому разобраться вам может помочь англо-русский словарь. Здесь приводятся названия файлов и кратко описано назначение собранных в них функций. При использовании большинства функций надо использовать не S (Simplify), а **X** (**approX**). Это означает, что будет получено приближенное решение задачи.

**SOLVE.MTH** – решение нелинейных систем уравнений.
**VECTOR.MTH** – дополнительные векторные и матричные функции.
**NUMERIC.MTH** – численные производные.
**INT_APPS.MTH** – приложения интегрирования.
**ODE1.MTH** – обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка (элементарные методы).
**ODE1.MTH** – обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка (развитые методы).
**ODE2.MTH** – обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка.
**ODE_APPR.MTH** – численное решение дифференциальных уравнений.
**RECUREQN.MTH** – решение рекуррентных уравнений.
**APPROX.MTH** – рациональная аппроксимация Падэ.
**EXP_INT.MTH** – интегралы, содержащие экспоненты, логарифмы, синусы и косинусы.

**PROBABIL.MTH** – дополнительные вероятностные функции.
**FRESNEL.MTH** – интегралы Френеля.
**BESSEL.MTH** – функции Бесселя и Эйри.
**HYPERGEO.MTH** – гипергеометрические функции.
**ELLIPTIC.MTH** – эллиптические интегралы.
**ZETA.MTH** – дзета-функция, полилогарифм и дилогарифм.
**GRAPHICS.MTH** – пространственные кривые, параметрические поверхности и комплексные величины.
**MISC.MTH** – разнообразные утилиты.
**RANDOM_POLY (x, d, s): =** – полином от $x$ степени $d$ со случайными коэффициентами от $-s$ до $s$.
**RANDOM_VECTOR (n, s): =** $n$-элементный вектор со случайными элементами от $-s$ до s.
**RANDOM_MATRIX (m, n, s): =** матрица $m$ на $n$ со случайными элементами от $-s$ до $s$.
**FIBONACCI (n) :=** $n$-е число Фибоначчи.
**BERNOULLI (n) :=** $n$-е число Бернулли.
**CATALAN (n) :=** $n$-е число Каталана.
**GOODNESS_OF_FIT (u, x, A): =** среднеквадратичное отклонение $u(x)$ от данных из матрицы А.

# КРАТКИЙ АНГЛО-РУССКИЙ СЛОВАРЬ СИСТЕМЫ DERIVE

## A

abandon покинуть
abort удалить
about приблизительно, почти, около
above раньше, до; свыше, больше
accuracy точность
active активно
adapter адаптер
adjoint граница, соседний, примыкать
all все, весь, всецело, целое
algebra алгебра
amount количество, итог, размер
and и
angle угол
any любой
append присоединять, прибавлять
applicable пригодный
approach подход, приближение
approximate приблизительный, приближенное значение
approximation приближенное значение
arccosecant арккосеканс
arccosine арккосинус
arccotangent арккотангенс
arcsine арксинус
arctangent арктангенс
argument аргумент
arithmetic арифметика
arrow стрелка
as как
associated объединенный, связанный
asymptotic асимптотический
at в, на, у, при, к
aux сокращение от auxiliary
auxiliary вспомогательный
auto автоматический
author автор
axis ось
axes оси
average среднее число

## B

background фон
base основание
before перед, прежде чем
begin начинать
below под, ниже

between между
binomial бином, двучлен, биномиальный
blank пустой, чистый, сплошной
border граница, край, кайма
both оба, обе
bottom низ, нижний, основной
bound граница
box коробка, ящик
branch ветвь
build строить, сооружать
but last кроме

## C

calculate вычислять
calculator калькулятор
calculus исчисление
cannot не может
cancellation сокращение
capital основной
case регистр, выбор
catastrophic катастрофический
center центр, помещать в центре
chan цепочка, цепь
chainge сменить
character особенность, отличительный признак, качество, свойство, характер
clear чистый, очистить
close закрыть
cofactor сомножитель
collect собирать
color цвет
column столбец
combination сочетание, комбинация, соединение
combine объединение, объединять
command команда
complex комплексный
composition структура, составные части
compute компьютер
confluent сливающийся
connected соединять, связывать
constant константа
contact контакт
continue продолжать
converge приближаться (к пределу)
coordinate координата
cosine косинус
cross перечеркивать, пересекать; здесь – указатель координат
cumulation совокупный, накопленный
cursor курсор
curvature кривизна
curvilinear криволинейный

## D

declare объявлять, описать
degree степень, градус, уровень
default упущение, недосмотр, выход из...
define определять
definite определенный, точный
delete удалить
demo сокращение от demonstration
demonstration доказательство, демонстрация, наглядный пример
denominator знаменатель, приведение к общему знаменателю
density плотность
derivative производная
derive получать, извлекать
desire просить, просьба, желание
designate определять, обозначать, указывать

diamond ромбоидальный
discrete абстрактный, раздельный, состоящий из отдельных частей
different другой, отличный
differential дифференциал, дифференциальный
differentiate дифференцирование
digit знак, однозначное число
dimension размерность, длина
dimensional имеющий измерение, пространственный
direction направление
disk диск
display дисплей
distribution распределение, распространение, демонстрация
domain область, диапазон
done сделанный, соответствующий обычаю
drive драйвер, устройство
dubious сомнительный

## E

echelon ступенчатое разложение
edit редактировать
editing редактирование
efficient сомножитель, фактор
element элемент
eliminate исключать (неизвестное)
elliptic эллипс
end конец
enter вводить, ввести
embellish украшать, приукрашать
error ошибка
equation уравнение
exact точный, строгий, верный, правильный
execute выполнять, осуществлять, доводить до конца
exit выход
exist существовать
expand разложить по степеням, раскрыть скобки, расширить, увеличить в объеме
expansion расширение возможностей, раскрытие (скобок), разложение
expression выражение
exponential экспоненциальный
expanded распространенный, расширенный
exploitation эксплуатация
extract выделять, извлекать (корень)
extraction извлечение корня
extend расширять, простирать, продолженный
eye глаз, взгляд
evaluate оценивать, выражать в числах
evaluating вычисление

## F

factor множитель, коэффициент
factorial факториал
factoring разложение на множители
famous знаменитый, известный, отличный, замечательный
few мало
find найти
found найдено
file файл
finite конец
first первый, начальный, сначала
flip щелчок, щелкнуть
the flip side обратная сторона
following следующий
font фонт
for для

foreground передний план
formula формула
fraction дробь
fraction common простая дробь
fraction proper правильная дробь
fraction improper неправильная дробь
fractional, fractionary дробный, частичный
frame кадр, рама
free свободный
frequency частота, частое повторение
from от
full полный
function функция

## G

generalize обобщать, устанавливать, вычислять
geometrical геометрический
geometry геометрия
get получать, достигать
grid решетка, сетка
graphic графический

## H

half половина
half-angle половинный угол
hot горячий
height степень, высота, вершина
help помощь, средство
hide скрытый
hidden невидимый, спрятанный
high высокий, высоко
horizontal горизонталь, горизонтальный

## I

imaginary мнимый
implicit неявная функция
in в, внутри чего-либо
incomplete неполный, незаконченный
indeterminate неопределенный
inf – сокращение от infinity
infinitesimal бесконечно малая величина
*infinity* бесконечность
inner внутренний
input ввод
integer целое число
integral интеграл
integrate интегрировать
integration интегрирование; составной, полный, целый
internal внутренний
interval интервал
inverse *обратный порядок,* обратная пропорциональность
iteration повторение
itself сам, по своей природе

## J

judicious здравомыслящий
jump прыгать, таблица перехода, переключатель

## K

key ключ, клавиша
kind сорт, класс, признак, разновидность

## L

label метка, ярлык
large большой
last последний
layout расположение, план, показ
leave покидать
left левый
length длина
letter буква, символ, элемент алфавита
limit предел
line строка, линия
load ввести
logarithm логарифм
lower нижний

## M

many много
maximum максимум
mean середина, среднее число
manage руководить, управлять, стоять во главе
many много
margin окаймлять
mark отметка
matrix матрица
max (сокращение от maximum) максимум
maximum максимум
medium средний
menu меню
merge сливать, соединять
message сообщение
min (сокращение от minimum) минимум
minimum минимум
minus минус
mixed смешанный, перемешанный
monitor монитор
mode режим, метод
monitor монитор
move движение, передвинуть
multiple составной, складной, кратный, многократный, кратное число
multiply умножать
multiple angles – кратные углы
must должен
must be должен быть, необходим
mute немой; здесь – звуковой сигнал

## N

name имя
near близкий, около
necessary необходимый, нужный
next следующий, ближайший
no нет
not не, нет
not ready не готов
notation система счисления
number номер, число, нумеровать
numerical численный

## O

one один
open открыть, раскрыть
operator оператор
option выбор, право выбора или замены, предмет выбора
orientation ориентация
or или
order порядок, последовательность, приводить в порядок

out вне, снаружи, наружный
out~ завершение, прекращение чего-либо
output вывод, продукция, итог, результат
overwrite здесь: снова записать (поверх)

## P

panels панели
page страница
parameter параметр
parametric параметрический
partial частный, частичный
path путь
paper бумага
per через, посредством, согласно
phase период, фаза, аспект, сторона
plus плюс
plot график, чертеж
point точка, пункт
points точки
polar полярный
polinomial многочлен, полином
positive положительный
position местоположение, позиция
power степень
precision точность, аккуратность
preferred желаемый
press нажать
previous предыдущий
principial главный, ведущий
print печатать
printer принтер
probability вероятность
product произведение
prompt сообщение, подсказка
project проект

## Q

questionable сомнительный
quit покидать, оставлять, бросать; здесь выход из системы

## R

radical радикал, знак корня
radius радиус
radix корень, основание системы счисления
range диапазон, амплитуда, ряд, сфера, пространство, располагать в порядке
ratio отношение, пропорция, коэффициент, соотношение
rational рациональный
read читать
reading чтение
ready готов
real действительный
recipe рецепт, средство, способ
reciprocal обратный
rectangular прямоугольный
reduce сокращать, приводить к общему знаменателю
relative относительный, сравнительный, соответственный, родственный
remove удалить, стирать, убирать
replacement замена, замещение
represent объяснять, формулировать, представлять, изображение, образ
respect отношение
retry повторить
reso сокращение от resolution
resolution разрешение, разложение на части

return возврат
reverse противоположный, перевертывать, обратный порядок
right правый
root корень
row строка, ряд
rule правило

## S

sample образец, шаблон, модель, проба
save запись
saving записывание
scale масштаб, размер
scaling масштабирование
scientific научный
scribe размещать
second секунда
select выбор, отбирать
sensitive точный
set установить
significant значащая (цифра), значащий разряд
sines синус
simple простой
simple fraction простая дробь
simply просто
simplification упрощение
simplify упрощать
simplication упрощение
simultaneous одновременный
size размер
slope наклон
slow медленный, тупой
small маленький, мелкий
smooth гладкий, сглаживать, однородный, плавный
solution решение
solve решать
some несколько, некоторые, некий
space пространство, расстояние, отведенное пространство, интервал, промежуток
special специальный, особенный, экстренный, индивидуальный
spiral спираль, спиральный, винтовой
split делить на части, определять
square квадрат, квадратный, возводить в квадрат, квадрат величины
squarefree свободный от квадратов
standard стандарт, норма
start начало
state состояние (системы)
status статус, положение
style стиль
subexpression подвыражение
subject пункт
substitute замена, подстановка
subtract вычитать
succession последовательность, непрерывный ряд
successive последующий, последовательный
sum сумма
superfluity избыток
superfluous ненужный, излишний
surface поверхность, внешний, поверхностный
system система
swap обмен

## T

tail ограниченный условием
tangent касательная, тангенс
term срок, период, предел; термин
text текст

this эта
these эти
through через, сквозь
tick сетка, отметка, отмечать
time время
to в, к
too слишком
top вершина, верх
toward происходящий
towards к, по направлению к
transcendent трансцендентный
transfer перемещение, перенос
transformation преобразование
translate перевести
translation перевод
trigonomenty тригонометрия
trivial обычный, тривиальный
truncate сокращать
truncated сокращенный
type тип, образец; превращение; печатать на машинке
twice дважды
twin свивать, скручивать

## U

unit единица, целое, единица измерения, элемент, узел, соединяться, соединение
upper верхний
use использовать
user пользователь
utility польза, полезность; здесь – файлы-утилиты

## W

warning предупреждение, предостережение, знак, признак
width ширина, расстояние
with с
window окно
word слово, выражать словами
work работа, действие

## V

value значение
variable переменная
vector вектор
version версия
vertical вертикальный

## Z

zoom увеличить, резко подняться

# Перевод выражений и сочетаний слов

**Abandon expressions**
Покинуть выражения

Aborted
Работа прервана

Angle sums & multiple angles
Суммы углов и кратные углы

At column
В столбце

At line
В строке

Auto change color
Автоматическая смена цвета

Auto z coordinate
z координата автоматически

Auto z length
Длина по z автоматически

**Cannot do implicit plots**
Не могу рисовать неявные функции

Cannot find COMMAND.COM
Не могу найти COMMAND.COM

Compute time:
Время счета:

**Disk full; delete some files and retry**
Диск переполнен; удалите несколько файлов и попробуйте еще раз

Display axes
Показывать оси

Drive not ready
Устройство не готово

Dubious accuracy
Сомнительная точность

**Enter DOS command**
Введите команду DOS

Enter base between 2 and 36
Введите основание между 2 и 36

Enter bound on solution
Введите границы поиска решения

Enter color number
Введите номер цвета

Enter column number
Введите номер столбца

Enter columns per tick mark
Введите число столбцов на деление

Enter coordinates
Введите координаты

Enter cross coordinates
Введите координаты пересечения

Enter expansion point
Введите точку разложения

Enter expression
Введите выражение

Enter expression or press Enter
Введите выражение или нажмите Enter

Enter file name
Введите имя файла

Enter grid panels
Введите число ячеек решетки

Enter interval length
Введите длину интервала

Enter label number
Введите номер выражения

Enter left bound
Введите левую границу

Enter limit point
Введите точку предела

Enter line length
Введите длину строки

Enter line number
Введите номер строки

Enter margin columns
Введите поле в столбцах

Enter margin lines
Введите поле в строках

Enter matrix element
Введите матричный элемент

Enter maximum degree
Введите максимальную степень

Enter mode number
Введите номер режима

Enter name
Введите имя

;Do not translate the word «default» in the next prompt:
Enter name or type «default»
Введите имя или введите «default» (по умолчанию)

Enter number of columns
Введите число столбцов

Enter number of elements
Введите число элементов

Enter number of points
Введите число точек

Enter number of rows
Введите число строк

Enter numerical output style
Введите формат вывода чисел

Enter option
Введите пункт меню

Enter page columns
Введите число столбцов на странице

Enter page lines
Введите число строк на странице

Enter parameter domain
Введите область изменения параметра

Enter path (e.g. C:\DERIVE)
Введите путь (например C:\DERIVE)

Enter plot accuracy (0 to 9)
Введите тщательность рисования (от 0 до 9)

Enter replacement for
Введите замену для

Enter replacement for subexpression
Введите замену для подвыражения

Enter right bound
Введите правую границу

Enter rows per tick mark
Введите число строк на деление

Enter significant digits
Введите число значащих цифр

Enter significant digits to display
Введите число выводимых значащих цифр

Enter units per tick mark
Введите шкалу (число единиц на деление)

Enter variable
Введите переменную

Enter variable or press Enter
Введите переменную или нажмите Enter

Enter variables in desired order
Введите переменные в выбранной вами последовательности

Enter vector element
Введите элемент вектора

Enter window number
Введите номер окна

Enter window type
Введите тип окна

Evaluating row
Вычисляю ряд

Exponential transformations
Экспоненциальные преобразования

Expression too large to edit
Выражение слишком велико для редактирования

**File not found**
Файл не найден

**;Leave one blank space before the following 5 translations:**
expression:
выражение:

file:
файл:

from: c

in color
в цвете

internal error; contact Soft Warehouse!
Внутренняя ошибка. Обратитесь в Soft Warehouse!

Loading expression #
Загружается выражение #

Logarithm transformations
Логарифмические преобразования

Lower limit
Нижний предел

**Must be in graphics mode**
Необходим графический режим

Mute warning messages
Звуковой предупреждающий сигнал

**Next plot**
Следующий график

No finite real samples
Нет конечных действительных точек

No solutions found
Решений не найдено

**Overwrite existing file**
Записать поверх существующего файла

**Plotting bottom of expression**
Строится нижняя часть поверхности

Plotting expression
Строится выражение

Press H for help
Для получения справки нажмите латинскую букву H

Press any key to continue
Для продолжения нажмите любую клавишу

Press letter for desired subject
Нажмите букву, соответствующую выбранному пункту

Printer not ready
Принтер не готов

Printing expression #
Печатается выражение #

Printing window...
Печатается окно...

Projecting row
Проектируется ряд

Questionable solution
Сомнительное решение

Quit printing expressions
Прервать печать выражений

**Reading file...**
Считывается файл...

Remove hidden lines
Убрать невидимые линии

Return for all or select 1:
Return для всех или выберите 1:

Return for no more or select next:
Return для прекращения или выберите следующий:

**Saving expression #**
Записывается выражение #

Saving file...
Пишу в файле...

Scaling
Масштабирование

Select amount of factoring
Выберите размер факторизации

Select approach direction
Выберите направление подхода

Select arithmetic mode
Выберите тип арифметики

Select arrow key mode
Выберите режим клавиш-стрелок

Select background
Выберите фон

Select case mode
Выберите чувствительность имен к регистрам

Select character set
Выберите набор символов

Select coordinate system
Выберите систему координат

Select display adapter
Выберите адаптер дисплея

Select display mode
Выберите режим дисплея

Select input mode
Выберите режим ввода

Select monitor type
Выберите тип монитора

Select operator
Выберите операцию

Select orientation
Выберите ориентацию

Select plot mode
Выберите режим построения

Select plot point mode
Выберите режим печати точек

Select plot point size
Выберите размер точек

Select preferred branch for roots
Выберите желаемую ветвь корней

Select print range
Выберите диапазон печати

Select printer type
Выберите тип принтера

Select resolution
Выберите разрешение

Select save range
Выберите блок сохраняемых выражений

Select size
Выберите размер

Select text size
Выберите размер текста

Select value or domain of
Выберите значение или диапазон

Select zoom axis
Выберите изменение масштаба осей

Select zoom direction
Выберите направление изменения масштаба

Simplifying expression
Упрощается выражение

Syntax error detected at cursor
Над курсором найдена синтаксическая ошибка

**;The translation for the following line must begin with a capital R:**
R – Return to Derive
R – Возврат в Derive

This version not designed for HP 95LX
Эта версия не подходит для HP 95LX

Too few real sample points in box
В области слишком мало действительных точек

Too many variables
Слишком много переменных

Trig power transformations
Преобразования тригонометрических степеней

Type EXIT to return to
Напечатайте EXIT и нажмите Enter чтобы вернуться в

Upper limit
Верхний предел

# ЛИТЕРАТУРА

## Литература по высшей математике


1. **Берман Г.Н.** Сборник по курсу математического анализа. Учеб. пособие для вузов. – 20-е изд. – М.: Наука, 1985.

2. **Виленкин Н.Я. и др.** Задачник по курсу математического анализа. Ч. I, II – М.: Просвещение, 1971.

3. **Виноградова И.А., Олехник С.А., Садовничий В.А.** Задачи и упражнения по математическому анализу. – М.: Изд-во Московского университета, 1988.

4. **Виноградова И.А., Олехник С.А., Садовничий В.А.** Математический анализ в задачах и упражнениях: Учеб. пособие. – М.: Изд-во Московского университета, 1991.

5. **Выгодский М.Я.** Справочник по высшей математике. – Изд. 7-е. – М.: «Наука», 1964.

6. **Гмурман В.Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Учеб. пособие для студентов вузов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1979.

7. **Гурский Е.И.** Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. – 3-е изд., перераб. – Минск: Вышэйшая школа, 1984.

8. **Запорожец Г.И.** Руководство к решению задач по математическому анализу. — 4-е изд. – М.: Высшая школа, 1966.

9. **Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.** Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учеб. пособие для втузов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1978.

10. **Кудрявцев Л.Д. и др.** Сборник задач по математическому анализу Т. I. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Под ред. Л.Д. Кудрявцева. – М.: Наука, 1984.

11. **Кудрявцев Л.Д. и др.** Сборник задач по математическому анализу: Т. II. Интегралы. Ряды: Учеб. пособие для вузов. / Под ред. Л.Д. Кудрявцева. – М.: Наука, 1986.

12. **Матвеев Н.М.** Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Изд. 3-е исправл. и доп. – М.: Высшая школа, 1967.

13. **Марон И.А.** Диффренциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. – М.: Наука, 1973.

14. **Подольский В.А., Суходский А.М.** Сборник задач по математике для техников-программистов: Учеб. пособие для техникумов. – М.: Высшая школа, 1978.

15. **Пономарев К.К.** Составление дифференциальных уравнений / Под ред. Ю.С. Богданова: – Минск – Вышэйшая школа, 1973.

16. **Алексеев В.В. и др.** Практикум по вероятностным методам в измерительной технике: Учеб. пособие для вузов. – СПб.: Энергоатомиздат, Санкт-Петербургское отделение, 1993.

17. **Райхмист Р.Б.** Графики функций: Справочное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1991.

18. **Степанов В.В.** Курс дифференциальных уравнений. – Изд. 6-е. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953.

19. **Филиппов А.Ф.** Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Изд. 5-е испр. – М.: Наука, 1979.

20. Сборник задач по математике для втузов. Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука,1981.

21. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа. – М.: Наука, 1981.

22. Сборник задач по математике для втузов. – Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для втузов. Под ред. А.В. Ефимова А.В. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Наука, 1990.

23. **Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А.** Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. – М.: Высшая школа,1989.

24. **Атанасян Л.С., Атанасян В.А.** Сборник задач по геометрии. Учеб. пособие для студентов физико-математических факультетов пед. институтов. – Ч. I. – М.: Просвещение,1973.

25. **Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С.** Сборник задач по аналитической геометрии. – Изд. 3-е перераб. – М.: Наука,1964.

26. **Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А.** Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: Учеб. пособие / Под ред. Д.В. Беклемишева. – М.: Наука, 1987.

27. **Кованцов Н.И** и др. Диффренциальная геометрия, топология, тензорный анализ. Сборник задач. – Киев: Вища школа, 1982.

28. Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии / Под общ. ред. доц. Воднева. – Минск: Вышэйшая школа, 1970.

## Литература для учителей и школьников

29. **Амелькин В.В., Рабцевич В.Л.** Задачи с параметрами: Справ. пособие по математике. – Минск: АсаР, 1996.

30. **Болдянский В.Г.** Огибающая // Квант, 1987, № 3.

31. **Бунимович Е.А., Пигарев Б.П.** Задачи письменного экзамена по математике за курс средней школы: условия и решения. – М.: Школа-Пресс, 1996.

32. **Горнштейн П.И., Полонский В.П., Якир М.С.** Задачи с параметрами. – Изд. 2-е доп. и перераб. – Киев: Евроиндекс, 1995.

33. Задачи письменного экзамена по математике за курс средней школы. Вып.3. – М.: Школа-Пресс, 1994.

34. **Карп А.П.** Сборник задач по алгебре и началам анализа: Учеб. пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 1995.

35. **Петров К.** Квадратичная функция и ее применение: Книга для учащихся. – М.: Просвещение, 1995.

36. **Шарыгин И.Ф.** Решение задач. Учеб. пособие для 10 кл. общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 1994.

37. **Звавич Л.И., Аверьянов Д.И., Смирнова В.К.** Экзаменационные задачи по алгебре для школьников и абитуриентов. Сборник заданий для подготовки к выпускному экзамену по алгебре и началам анализа за курс средней школы с решениями, комментариями, ответами и советами. – М.: Издательский дом «Дрофа», 1997.

## Литература о системе Derive

38. **Дьяконов В., Бирюков С.** Derive в России // Монитор-Аспект. – 1995. – № 3. – С. 56–60.
39. **Дьяконов В.** Жемчужина символьной математики // Монитор-Аспект. – 1993. – № 2. – С. 36–40.
40. Компьютерный учебник. Академия нефти и газа им. И.М. Губкина, 1992.
41. **Дьяконов В. П.** Справочник по системе символьной математики Derive. – М.: Ск пресс, 1998.